Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 14 settembre 2009

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). Il candidato *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1. Sia $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ una mappa a valori reali nell'intervallo aperto $(0,1)$. Si definisca il seguente insieme

$$A := \left\{ a \in (0,1) \ : \ \exists\ f^*(a) := \lim_{\substack{(x,y)\to(a,a) \\ x\neq y}} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right\}.$$

(i) Si mostri che set $a \in A$, allora f e' derivabile in a.

(ii) Si mostri che se $a_n \in A$ converge ad $a \in A$, allora

$$\lim_{n\to\infty} f^*(a_n) = f^*(a).$$

(iii) Si dia un controesempio di una funzione derivabile in $(0,1)$ per cui A e' strettamente contenuto in $(0,1)$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 a valori reali tale che

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}|x| + 3 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Si mostri che tutte le soluzioni dell'equazione differenziale ordinaria

$$x'(t) + x(t) + f(x(t)) = 0,\ t \in \mathbb{R},$$

sono limitate su $[0, +\infty]$.

3. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2009 & 0 \\ 2009 & 1 & 1492 \\ 0 & -1492 & 1 \end{bmatrix}$$

e fissato $X_0 \in \mathbb{R}^3$, $X_0 \neq 0$, sia $X = X(t)$, la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t),\ t \in \mathbb{R}, \\ X(0) = X_0. \end{cases}$$

Valutare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il limite

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-kt}\|X(t)\|^2.$$

4. Siano $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ due serie a termini (strettamente) positivi. Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false dando una dimostrazione o un controesempio.
(i) Se una delle due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, allora anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$$

converge.
(ii) Se entrambe le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergono, allora anche la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n b_n}{a_n + b_n}$$

diverge.

5. Sia $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sequenza di numeri reali posiviti $c_i \geq 0$ tali che

$$\sum_{i=1}^{+\infty} c_i < +\infty.$$

Mostrare che esiste una sottosequenza $\{c_{i(j)}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\lim_{j\to\infty} i(j) \cdot c_{i(j)} = 0.$$

Gruppo B

6. Un punto materiale di massa m si muove su una sfera S^2 di raggio unitario.
(i) Si scriva la Lagrangiana del moto in presenza di un campo gravitazionale uniforme g.
(ii) Si trovino i punti di equilibrio e la loro stabilità.
(iii) Si trovino i gruppi di simmetria e le corrispondenti quantità conservate nei due casi $g \neq 0$ e $g = 0$.

7. Sia $p : E \to B$ un'applicazione quoziente, ovvero p è continua, suriettiva e B ha la topologia quoziente (U è aperto in B se e solo se $p^{-1}(U)$ è aperto in E). Si dimostrino le seguenti affermazioni.
(i) Se B è connesso e ogni fibra $p^{-1}(b)$ è connessa, $b \in B$, allora E è connesso.
(ii) Un'applicazione $f : B \to X$ è continua se e solo se $g : E \to X$ definita da $g := f \circ p$ è continua.
(iii) Sia $p : E \to B$ un'applicazione continua e suriettiva. Se p è aperta (l'immagine di ogni aperto in E è aperto in B) allora p è un'applicazione quoziente.
(iv) Dimostrare che non vale il viceversa del punto (iii) (suggerimento: si consideri la proiezione sulla prima coordinata dell'unione delle due assi delle coordinate $x = 0$ e $y = 0$ in $\mathbb{R}^2$ sull'asse $y = 0$).

8. Si consideri la matrice

$$T = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Determinare un fascio di ellissi che vengono lasciate invariate dalla trasformazione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita dalla moltiplicazione per T. Dimostrare che T non ha ordine finito. Sia $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ un punto del piano, diverso dall'origine. Si consideri la successione P, $T \cdot P$, $T^2 \cdot P$, $\dots$. Descrivere la chiusura topologica della sua immagine.

9. Sia A una matrice quadrata $n \times n$ su un campo K tale che $A^k = 0$, per un numero intero $k \geq 1$ (A è nilpotente).

i) Mostrare che 0 è l'unico autovalore di A.

ii) Dimostrare, per induzione su n (senza usare teoremi sulla triangolarizzazione delle matrici), che A è simile a una matrice triangolare della forma

$$\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ \vdots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

10. Sia $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polinomio a coefficienti interi. Verificare le seguenti affermazioni.

(i) Se ogni intero $n > 0$, l'equazione $f(x) = n$ ammette almeno una soluzione intera, allora

$$f(x) = \pm x + c,$$

con c costante.

(ii) Se l'insieme $f(\mathbb{Z})$ contiene solo numeri primi, allora f è costante.

(iii) Se l'insieme $f(\mathbb{Z})$ contiene solo numeri del tipo $\pm 2^a \cdot 3^b$, con $a, b \in \mathbb{N}$, allora f è costante.