Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 17 settembre 2008

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). Il candidato *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1. Studiare la funzione

$$f(x) := x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$$

per $x \in]0, +\infty[$. In particolare, calcolare il limite di f per $x \to 0+$ e $x \to +\infty$ e discutere gli intervalli di monotonia e convessità.

2. Si considerino le soluzioni reali dell'equazione differenziale

$$y''' - y'' + y' - y = 0\,.$$

(i) Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni definite su $\mathbb{R}$.
(ii) Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni limitate definite su $\mathbb{R}$.
(iii) Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni definite su $\mathbb{R}$ e tali che

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0\,.$$

3. Dimostrare che per ogni x, $y \in \mathbb{R}$ vale la diseguaglianza

$$\sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{1+y^2} + |x-y|\,.$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e si ponga

$$g(x) = \int_1^2 f(xt)dt\ ,\ \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\ .$$

(i) Provare che g è derivabile per ogni $x \neq 0$.
(ii) Dimostrare che, se si ha $g(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora vale

$$f(x) = 2^{-1} f(2^{-1}x)\ ,\ \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\ .$$

(iii) Provare che, sempre supponendo $g(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora si ha

$$f(x) = 0\ ,\ \text{per ogni } x \in \mathbb{R}\ .$$

5. Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Quali sono le immagini secondo f delle circonferenze $|z| = r$ con $r > 0$?

Gruppo B

6. Un solido cilindrico di raggio r e massa m (con il momento di inerzia $I = \frac{1}{2}mr^2$ rispetto al proprio asse) rotola senza scivolare giù per un piano inclinato di un angolo α, soggetto soltato alla forza di gravità.
Trovare la distanza percorsa nel tempo t se il cilindro è in quiete per $t = 0$.

7. Sia

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{1,2} & & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ . & & . & & . \\ . & & & . & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

una matrice quadrata triangolare. Caratterizzare, in termini dei coefficienti $a_{i,j}$, quando A è diagonalizzabile se
i) tutti i λ_i sulla diagonale sono uguali;
ii) tutti i λ_i sono distinti;
iii) $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$.

8. i) Dimostrare che il gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ invertibili su $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme aperto e non connesso dello spazio $\mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$ di tutte le matrici $n \times n$ che identifichiamo con $\mathbb{R}^{n^2}$.
ii) Dimostrare che il sottogruppo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ di determinante uno è chiuso e non compatto in $\mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$.
iii) Dimostrare che il sottogruppo ortogonale $\mathrm{O}_n(n, \mathbb{R})$ (matrici ortogonali $n \times n$) è compatto in $\mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$.

9. Sia $A = (a_{ij})$ una matrice (quadrata) $n \times n$ a coefficienti nel corpo reale $\mathbb{R}$. Indicato con ${}^cA$ la matrice dei cofattori di A (i.e. ${}^cA := (b_{ij})$ dove b_{ij} è il prodotto tra $(-1)^{i+j}$ e il determinante della matrice ottenuta da A sopprimendo la j-esima riga e la i-esima colonna), si determini il valore di $\det({}^cA)$.

10. Siano X uno spazio topologico T_1 ed x un punto aderente ad un sottoinsieme A di X con $x \notin A$.
(i) Si provi che ogni intorno di x contiene un'infinità di punti di A.
(ii) Si provi che l'intersezione degli intorni di A (in X) coincide con A.
(iii) Si dia un esempio di spazio topologico Y che sia T_0 e non T_1; si veda, inoltre, se le proprietà (i) e (ii) continuano a valere anche per spazi T_0.

P.S. Si richiamano le definizioni dei seguenti assiomi di separazione:
Uno spazio topologico X viene detto T_0 (o anche spazio di Kolmogoroff) se per ogni coppia di punti distinti di X esiste un intorno di uno di essi che non contiene l'altro punto.
Uno spazio topologico X viene detto T_1 (o anche spazio accessibile) se per ogni coppia di punti distinti $x, y \in X$ esiste un intorno di x che non contiene y e un intorno di y che non contiene x.