Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 14 settembre 2011

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). Il candidato *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1. Si consideri la funzione
$$f(x) = e^{\sin(x^{10}+x^{11})}.$$
Calcolare
$$\frac{d^{32}}{dx^{32}} f(0).$$

2. Sia a_n la successione definita da
$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[4]{k}.$$
Trovare il comportamento asintotico di a_n per $n \to \infty$.

3. (a) Sia A un insieme aperto, limitato e connesso di $\mathbb{R}^2$. Per ogni direzione assegnata d, si dimostri che esiste un'unica retta parallela a d che divide A in due parti con la stessa area.
(b) Siano A, B insiemi aperti, limitati e connessi di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che esiste una linea retta che divide sia A che B in due parti con area uguale.
(*Suggerimento*: si studi la dipendenza della retta ottenuta nel punto 1 dal parametro d.)

4. Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ una funzione continua e iniettiva e $A \subset [0,1]$ un insieme aperto, $A := \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Si assuma che:
(a) se x_1, x_2 sono due punti in una componente connessa (a_i, b_i) di A, allora
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|;$$
(b) $f([0,1] \setminus A)$ ha misura 0.
Si dimostri che la disuguaglianza
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$$
vale per ogni $x_1, x_2 \in [0,1]$.

5. Si consideri il sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^2 \end{aligned}$$
(a) Trovare una funzione $F(x,y)$ costante lungo le soluzioni del sistema.
(*Suggerimento*: si elimini la variabile temporale.)
(b) Deteminare per quali dati iniziali si hanno soluzioni limitate.

Gruppo B

6. Una particella di massa m che si muove in due dimensioni è fissata all'estremità di una fune priva di peso fissata a un disco di raggio R. Inizialmente la fune è completamente avvolta cosicché la particella tocca il disco.
All'istante $t = 0$ una velocità v_0 è impressa alla particella in direzione radiale, e la fune inizia a svolgersi.

a) Scrivere la funzione Lagrangiana della particella in termini di una opportuna coordinata generalizzata;

b) trovare la soluzione dell'equazione del moto che soddisfa la condizione iniziale assegnata;

c) usando b) si calcoli il momento angolare della particella rispetto al centro del disco.

7. Trovare l'equazione della circonferenza in $\mathbb{R}^3$ che passa per i punti

$$(0, 4, -1), \quad (5, 0, 0), \quad (-4, 4, 3).$$

8. Per un numero primo p, sia $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ il campo finito con p elementi.

(a) Calcolare il numero di elementi (l'ordine) del gruppo $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ delle matrici $n \times n$ invertibili con coefficienti in $\mathbb{Z}_p$.

(b) Calcolare l'ordine del gruppo $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}_p)$ di matrici con determinante uno.

Giustificare le risposte.

9. Sia $D : M(n \times n, K) \to K$ un'applicazione definita sulle matrici A quadrate $n \times n$ su un campo K, con le seguenti proprietà: D è lineare in ogni riga di A, D è alternante nelle righe di A, e $D(E_n) = 1$.

(a) Utilizzando trasformazioni elementari sulle righe, dimostrare che D è unica.

(b) Sia B una matrice fissata con $D(B) \neq 0$. Dimostrare che $D(AB)/D(B) = D(A)$ (verificare che $A \mapsto D(AB)/D(B)$ soddisfa le tre proprietà di D in i).

10. (a) Sia A un sottospazio compatto di X, B un sottospazio compatto di Y, e W un intorno di $A \times B$ in $X \times Y$.
Dimostrare che esistono aperti U in X e V in Y tale che $A \times B \subset U \times V \subset W$.
(*Suggerimento*: considerare primo il caso $\{a\} \times B$.)

(b) Se Y è compatto, dimostrare che la proiezione $p : X \times Y \to X$ è un'applicazione chiusa.