Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 14 settembre 2010

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). Il candidato *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, e $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di compatti tale che $K_{i+1} \subset K_i \subset [0,1]$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.
(i) Si mostri che

$$f\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f(K_i).$$

(ii) Si dia un controesempio al Punto (i) nel caso che $\{K_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sia una famiglia numerabile di insiemi non necessariamente compatti tali che $K_{i+1} \subset K_i \subset [0,1]$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞, con la seguente proprietà: se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è uno zero di f, allora
(i) il gradiente di f in (x,y) e' singolare,
(ii) la matrice Hessiana di f in (x,y) non è singolare.
Mostrare che f può avere solo zeri isolati.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 con la seguente proprietà: esiste $C \in [0,+\infty)$ tale che per ogni $(t,x) \in \mathbb{R}^2$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} f(t,x)\right| \leq C.$$

Si supponga che ogni soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$\dot{x} = f(t,x)$$

sia periodica con lo stesso periodo $T > 0$ fissato.
Si dimostri allora che, per ogni $x \in \mathbb{R}$ fissato, la funzione $t \mapsto g_x(t) := f(t,x)$ è periodica con lo stesso periodo T.

4. Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ una funzione continua tale che $f(x) < x$ per ogni $x \in (0,1]$. Si supponga inoltre che esista la derivata destra in 0 e che questa sia uguale a $\frac{1}{2}$. Fissato $a_0 \in [0,1]$ si consideri la successione definita per ricorrenza

$$a_{n+1} := f(a_n).$$

Si chiede di studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

al variare del parametro a_0.

5. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x,y) := xye^x + ye^y - e^x + 1,$$

e sia C l'insieme degli zeri di F,

$$C := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0\Big\}.$$

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 in intorno di $(0,0)$ e tale che il gradiente ∇f e la matrice Hessiana H di f in $(0,0)$ sono dati da

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stabilire se $(0,0)$ é un punto di minimo locale per f sull'insieme C.

Gruppo B

6. Un punto materiale P di massa m si muove nello spazio $\mathbb{R}^3$ soggetto al campo gravitazionale $(0,0,-g)$ a 2 molle di costante elastica $k > 0$ vincolate nei punti $(0,0,0)$ e $(1,0,0)$.

(i) Si scriva la Lagrangiana del moto.

(ii) Si descrivano le orbite di P.

(iii) Si trovino i gruppi di simmetria e le corrispondenti quantità conservate nel caso in cui $g = 0$.

7. In $\mathbb{R}^3$ siano date tre sfere S_1, S_2, S_3 e un punto P tale che

$$P \in S_1 \cap S_2 \cap S_3.$$

Si supponga che le tre sfere non abbiano alcuna retta tangente in comune.
Dimostrare che esiste un punto $Q \neq P$ tale che

$$Q \in S_1 \cap S_2 \cap S_3.$$

8. Si considerino le sequenti due curve in $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha(t) := \left(t, \frac{1}{t}, t-1\right), \qquad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$\beta(\tau) := \left(\tau^3 + 2\tau, \tau^2 - 2\tau + 2, 2\tau - 1\right), \qquad \tau \in \mathbb{R}.$$

Determinare eventuali rette tangenti ad entrambe le curve e i relativi punti di tangenza.

9. Si consideri l'anello dei polinomi $\mathbb{Z}_4[x]$, dove $\mathbb{Z}_4$ denota l'anello quoziente $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

i) Dimostrare che i divisori dello zero sono tutti e soli i polinomi della forma $2f(x)$, con $f(x) \in \mathbb{Z}_4[x]$.

ii) Dimostrare che gli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_4[x]$ sono della forma $1+g(x)$, con $g(x)$ divisore dello zero in $\mathbb{Z}_4[x]$.

10. Sia G un gruppo, $H \subset G$ un sottogruppo di G. Si definisca il normalizzatore $N(H)$ di H come

$$N(H) := \Big\{ g \in G : gHg^{-1} \in H \Big\}.$$

Si dimostri che:

(i) $N(H)$ è un sottogruppo di G;

(ii) H è un sottogruppo normale di $N(H)$;

(iii) $N(H)$ è il sottogruppo massimale di G con la proprieta' (ii);

(iv) Si determini $N(H)$ nel caso in cui $G = S_4$ (cioè il gruppo simmetrico di ordine 4) e H è il sottogruppo generato da $(12)(34)$.