Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 17 settembre 2007

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) e uno nel gruppo B (esercizi 6-10). ll candidato *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1. a) Calcolare il numero $c \in \mathbb{R}$ per cui si ha

$$\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = c.$$

b) Per il numero c definito sopra, dimostrare che esistono infinite coppie (x, y) di numeri razionali entrambi positivi che soddisfano alla relazione

$$\arctan(1) + \arctan(x) + \arctan(y) = c. \tag{1}$$

c) Detto A l'insieme di tali coppie di numeri razionali positivi, trovare l'estremo inferiore delle distanze dei punti di A dall' origine $(0, 0)$ e dire se tale "inf" è un minimo. Stessa domanda relativamente all'insieme (questa volta costituito da coppie di numeri reali)

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \big(y \geq 2x > 0 \big) \ \wedge \ \big((x, y) \text{ soddisfa } (1) \big) \}.$$

d) Dire infine se l'insieme A contiene coppie di interi positivi oltre a $(2, 3)$ e $(3, 2)$.

2. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la mappa definita nel modo seguente

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} 5x + \sin y \\ 5y + \arctan x \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che T è iniettiva e suriettiva da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$.

3. Si consideri l' equazione differenziale lineare omogenea del secondo ordine:

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0, \tag{2}$$

dove $a(\cdot), b(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue. Rispondere alle seguenti domande, giustificando, in ogni caso, la risposta.

a) È possibile che, per qualche scelta dei coefficienti $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$, l'equazione (2) abbia $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = \sin(2t)$ entrambe come soluzioni globali?

b) È possibile che, per qualche scelta dei coefficienti $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$, l'equazione (2) abbia come soluzioni $y_1(t) = \sin(t)$ e $y_2(t) = \sin(7t)$ entrambe come soluzioni globali?

c) È possibile che, per qualche scelta dei coefficienti $a(\cdot)$ e $b(\cdot)$, l'equazione (2) abbia come soluzioni $y_1(t) = \sin(2t + 3)$ e $y_2(t) = \cos(2t - 4)$ entrambe come soluzioni globali?

d) Assumiamo ora che sia $a(t) > 0, \forall\, t \geq 0$ e sia $b > 0$ una costante. Dimostrare che esiste una costante $M = M(b) > 0$ tale che la soluzione $y(\cdot)$ di (2) con $y(0) = y'(0) = 1$, verifica alla condizione $|y(t)| \leq M$, $\forall\, t \geq 0$. Trovare una stima (possibilmente ottimale) per M che sia valida per ogni possibile funzione $a(\cdot) > 0$.

4. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ sia $\Pi_t = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = t\}$. Preso $T > 0$, sia S_T la superficie racchiusa tra i piani Π_0 e Π_T tale che, per ogni $t \in [0,T]$, la sua intersezione col piano Π_t è la circonferenza di raggio 1 e centro $(\cos \frac{t}{T}, \sin \frac{t}{T}, t)$.
Calcolare

$$\lim_{T \to 0+} \text{Area}(S_T) \; .$$

5. Per ogni $\rho > 0$ sia $B_\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < \rho^2\}$. Dimostrare che esiste una costante $\alpha > 0$ tale che

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^4} \iint_{B\rho} [u(x,y) - u(0,0)] \, dx \, dy = \alpha \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,0) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(0,0) \right]$$

per ogni $u \in C^2(B_1)$.

Gruppo B

6. a) Sia $A \in \mathrm{M}(n \times n)$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dire se A è diagonalizzabile o triangolarizzabile sui campi $K = \mathbb{R}, \ \mathbb{C}, \ \mathbb{Z}_2, \ \mathbb{Z}_3, \ \mathbb{Z}_5$.

b) Dato λ in un campo K e numeri naturali $n \geq m \geq r \geq 1$, dare un esempio di una matrice $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ tale che la molteplicità algebrica dell'autovalore λ di A è uguale a m e la molteplicità geometrica è uguale a r.

7. Sia X uno spazio topologico, $A \subset X$, e sia $f \colon A \to Y$ un'applicazione continua, con Y uno spazio di Hausdorff.

a) Si dimostri che se f si può estendere a un'applicazione continua $g \colon \bar{A} \to Y$, allora g è unica.

b) Dimostrare con un esempio che non è sempre possibile estendere f a un'applicazione continua $g : \bar{A} \to Y$ (giustificando la risposta).

8. Sia

$$G = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + t, \; A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \; t \in \mathbb{R}^n\}$$

il gruppo affine di $\mathbb{R}^n$, con i due sottogruppi

$$R = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, f(x) = Ax, \; A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\}$$

e

$$T = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \; f(x) = x + t, \; t \in \mathbb{R}^n\}.$$

a) Dimostrare che uno di questi sottogruppi è normale e l'altro no, e dare una spiegazione geometrica di questo fatto.

b) Sia $\alpha \colon G \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ la bigezione canonica. Trovare la moltiplicazione in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ ("prodotto semidiretto") che corrisponde alla composizione in G (tale che α diventi un isomorfismo di gruppi).

9. Siano:

$SU(2)$ il gruppo delle matrici 2×2 a coefficienti complessi, unitarie (cioé tali che $AA^* = I_2$, essendo A^* la matrice hermitiana coniugata di A, e I_2 la matrice identità 2×2) e di determinante 1;

$SO(3)$ il gruppo delle matrici 3×3 a coefficienti reali, ortogonali (cioé tali che $AA^t = I_3$, essendo A^t la matrice trasposta di A, e I_3 la matrice identità 3×3) e di determinante 1;

$\mathbb{PR}^3$ lo spazio proiettivo reale tridimensionale.

In ognuno dei casi seguenti, si costruisca una applicazione bigettiva (di insiemi) fra i due spazi indicati.

a) $\mathbb{PR}^3 \simeq S^3/\mathbb{Z}_2$, dove S^3 è la sfera unitaria in $\mathbb{R}^4$, e $\mathbb{Z}_2$ agisce su S^3 scambiando i punti antipodali.

b) $\mathbb{PR}^3 \simeq SO(3)$.

c) $SU(2) \simeq S^3$.

d) Identificando $\mathbb{Z}_2$ con il sottogruppo di $SU(2)$ formato dagli elementi $\pm I_2$, dimostrare che $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \simeq SO(3)$.

10. Sia dato un sistema meccanico conservativo a un grado di libertá con energia cinetica K ed energia potenziale V date in termini della coordinata libera q da

$$K = \frac{1}{2}(\dot{q}^2), \qquad V = \frac{1}{2}(a(\sin q)^2 - 2b \sin q)$$

con a e b numeri reali nonnegativi. Si chiede di :

a) scrivere l'equazione di Lagrange;

b) determinare le configurazioni di equilibrio per q compreso tra 0 e 2π e discuterne la stabilità;

c) determinare il periodo delle piccole oscillazioni vicino ad una configurazione di equilibrio stabile.