Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste

Esame di Ammissione alle borse per la Laurea Magistrale in Matematica

Prova scritta del 14 settembre 2006

Il candidato risolva cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1-5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6-10). ll candidato *indichi chiaramente* sulla prima pagina dell'elaborato quali sono gli esercizi svolti, e di cui chiede la valutazione (in ogni caso non più di cinque).

Gruppo A

1. Sia $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ una funzione continua e decrescente, tale che $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$, e sia $g\colon [0,1] \to [0,+\infty]$ la funzione definita da $\displaystyle g(y) := \sum_{n=0}^{\infty} f(y+n)$ per ogni $y \in [0,1]$.

(a) Dimostrare che $g(y) < +\infty$ per ogni $y \in [0,1]$.

(b) Dimostrare che g è continua e decrescente su $[0,1]$.

(c) Dimostrare che esiste $y \in [0,1]$ tale che $\displaystyle g(y) = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$.

2. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\log(1+s)}{(1+\log s)\sqrt{1+s^2}}\,ds\,.$$

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1-x^3}{x} y(x)\,, \\ y(1) = -1\,. \end{cases}$$

Dimostrare che la soluzione y è convessa in un intorno di $x = 1$.

4. Sia $S := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} = 1\}$. Trovare i punti di massimo e di minimo su S della funzione

$$f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

5. Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Dimostrare che la funzione $f''(x)$ si annulla in almeno due punti.

Gruppo B

6. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ sia u un versore (vettore di modulo unitario) fissato. Sia poi A la matrice $n \times n$ così definita:

$$A = I_n - 2\ {}^t\mathbf{u}\,\mathbf{u}$$

dove $\mathbf{u}$ denota la matrice riga formata dalle componenti di u, e I_n è la matrice identità $n \times n$.

(a) Verificare che la matrice A è ortogonale;

(b) dimostrare che A è diagonalizzabile e determinarne gli autospazi.

7. Nello spazio affine reale di dimensione 3, siano fissati un punto P, un piano π ed una retta r. Discutere esistenza e unicità di una retta passante per P, che sia parallela a π e incidente r.

8. Dare un esempio di polinomio monico in $\mathbb{Z}[x]$ che sia irriducibile, ma si fattorizzi modulo 2, 3 e 5.

9. Sia X uno spazio topologico metrico. Dimostrare che la topologia di X ha una base numerabile se

(a) X ha un sottoinsieme denso numerabile

oppure

(b) X è compatto.

10. Una sfera puntiforme di massa m è lanciata all'interno di una rotaia circolare di raggio r e priva di attrito disposta in un piano verticale in presenza di un campo gravitazionale uniforme. Quale deve essere la velocità v_0 con cui la sferetta viene lanciata nel punto più basso della guida affinché non si stacchi dalla rotaia?