Borse di studio per laurea specialistica
prova scritta – 15 settembre 2004

Il candidato risolva al più cinque dei seguenti problemi, scegliendone almeno uno nel gruppo A (esercizi 1–5) ed uno nel gruppo B (esercizi 6–10).

Gruppo A.

Esercizio 1. Sia K un campo (corpo commutativo), e sia $f \in K[t]$ un polinomio a coefficienti in K.

(1) Supponiamo $\deg f = 3$. Si dimostri che f è irriducibile in $K[t]$ se e solo se non ha radici in K.
(2) Si dia un esempio di un campo K e di un polinomio f di grado 4 riducibile e senza alcuna radice.
(3) Sia $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, e sia $f := t^3 - t + 1$. Si dimostri che $K[t]/(f)$ è un dominio d'integrità (facoltativo: un campo) con 27 elementi.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti matrici a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per ciascuna di esse, si dica

(1) se è simile a una matrice diagonale
(2) se è simile a una matrice triangolare non diagonale.

Esercizio 3. Sia G un gruppo. Indichiamo con $\mathrm{Aut}(G)$ il gruppo degli automorfismi, cioè degli isomorfismi $\varphi : G \to G$ (con la composizione come prodotto). Sia $\mathrm{Inn}(G)$ il sottogruppo degli automorfismi interni, cioè quelli definiti tramite coniugio per un elemento di G. Si dimostri che $\mathrm{Inn}(G)$ è un sottogruppo normale di $\mathrm{Aut}(G)$. Si dimostri che $\mathrm{Inn}(G)$ è isomorfo a $G/Z(G)$, dove $Z(G)$ è il centro di G, cioè il sottogruppo degli elementi che commutano con ogni elemento di G.

Esercizio 4. Sia X un insieme non vuoto. Definiamo su X una topologia, imponendo che un sottoinsieme A sia aperto se e solo se è vuoto oppure il suo complemento $X \setminus A$ è un insieme finito.

(1) Dimostrare che questa è effettivamente una topologia su X, detta topologia del complemento finito.
(2) Dimostrare che con questa topologia, ogni sottoinsieme di X è compatto[1].
(3) Dire quando X con la topologia del complemento finito è di Hausdorff e quando è connesso.

Esercizio 5. Due particelle puntiformi di massa m_1 e m_2 sono vincolate a muoversi lungo una retta ed hanno velocità iniziali $v_1 \neq 0$ e $v_2 = 0$. Nelle ipotesi che avvenga l'urto e sia elastico (cioè con energia cinetica totale conservata), trovare il moto dopo l'urto stesso. Cosa accade per $m_2 \to \infty$?

[1] cioè che da ogni ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito: in alcuni testi si usa l'espressione quasicompatto.

Gruppo B.

Esercizio 6. Siano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 0 < y < \sqrt{x}\}$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\frac{1}{x^2+y^2} \le f(x,y) \le \frac{2}{x^2+y^2}$$

per ogni $(x,y) \in A$. Trovare tutti i valori del parametro $\alpha > 0$ tali che

$$\iint_A f(x,y)^\alpha \, dx\, dy < +\infty\,.$$

Esercizio 7. Dimostrare che per ogni $\lambda > 0$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - y^6 \\ y(0) = \lambda \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione y_λ definita in $[0,+\infty[$. Dimostrare inoltre che per ogni $\lambda > 0$ si ha

$$\lim_{x\to+\infty} y_\lambda(x) = 1\,.$$

Esercizio 8. Sia $X = C^1([-1,1],\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni $\phi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ derivabili con derivata continua, normato con

$$||\phi|| = \int_{-1}^{1} |\phi(s)|\, ds + \int_{-1}^{1} |\phi'(s)|\, ds.$$

Si verifichi che la successione di funzioni $(\phi_n)_{n\ge1}$ definite da

$$\phi_n(s) = \begin{cases} 1+s & \text{se } -1 \le s < 0 \\ 1+s-\frac{ns^2}{2} & \text{se } 0 \le s < \frac{1}{n} \\ 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n} & \text{se } \frac{1}{n} \le s \le 1 \end{cases}$$

è una successione di Cauchy in X, ma non è convergente in X.

Esercizio 9. Sia A una matrice reale simmetrica $n \times n$ e si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (Ax|x) + g(x),$$

dove $(\cdot|\cdot)$ indica il prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione continua che verifica la seguente condizione:

$$\exists\, c > 0, \quad \exists\, p > 2 \quad \text{tali che} \quad \lim_{|x|\to\infty} \frac{g(x)}{|x|^p} = c.$$

(1) Provare che esiste $y \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(y) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.

(2) Sia $g \in C^2$ tale che $g(0) = 0$, $\frac{\partial g}{\partial x_i}(0) = 0$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 0$ per ogni i, j. Provare che se il minimo autovalore di A è negativo, allora $y \ne 0$.

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(y) = \begin{cases} y & \text{se} \quad y \le 1, \\ 1 & \text{se} \quad y > 1, \end{cases}$$

Determinare, al variare del parametro $a > 0$, la soluzione $y_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = a. \end{cases}$$