# Equazioni semilineari in spazi di Hilbert

Alessandro Fonda

Note delle lezioni, maggio 2001

## 1 Lo spazio di Hilbert

Sia $H$ uno spazio vettoriale sul corpo $\mathbf{K}$, che si supporrà essere il corpo dei numeri reali $\mathbf{R}$ o quello dei numeri complessi $\mathbf{C}$. È definito un prodotto scalare $H \times H \to \mathbf{K}$ che indicheremo con $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Esso è tale che, per ogni $u, v, w \in H$ e $\alpha \in \mathbf{K}$, sono verificate le seguenti proprietà:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & \langle u, u \rangle \geq 0; \\
(b) & \langle u, u \rangle = 0 \text{ se e solo se } u = 0; \\
(c) & \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle; \\
(d) & \langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle; \\
(e) & \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle^*,
\end{array}
$$

dove $z^*$ indica il complesso coniugato di $z$ $(z^* = z \text{ se } z \in \mathbf{R})$ .

Poniamo, per ogni $u \in H$,

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}.$$

Dati $u, v \in H$, per ogni $\lambda \in \mathbf{K}$, si ha

$$0 \leq \|\lambda u + v\|^2 = |\lambda|^2 \|u\|^2 + \lambda \langle u, v \rangle + \lambda^* \langle v, u \rangle + \|v\|^2.$$

Prendendo, se $u \neq 0$, $\lambda = -\frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|^2}$, si vede che, per ogni $u, v \in H$, vale la disuguaglianza

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

È allora facile verificare che $\|\cdot\|$ è una norma su $H$. Indicheremo con $d(\cdot,\cdot)$ la distanza ad essa associata. Diremo che $H$ è uno spazio di Hilbert se, rispetto a tale distanza, $H$ è completo. Nel seguito, $H$ indicherà sempre uno spazio di Hilbert.

Di immediata verifica è l'identità del parallelogramma: per ogni $u, v \in H$, si ha

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Qualora, per $u, v \in H$, si abbia $\langle u, v\rangle = 0$, diremo che $u$ e $v$ sono tra loro ortogonali. Dato un insieme $E \subset H$, indicheremo con $E^\perp$ l'insieme dei vettori di $H$ che risultano ortogonali ad ogni vettore di $E$. È facile vedere che si tratta di un sottospazio chiuso di $H$. Inoltre, $E^\perp = \bar{E}^\perp$.

**Teorema 1.1.** *Dato $F$, un sottospazio chiuso di $H$, e $u_0 \in H$, esiste uno ed un solo $v_0 \in F$ tale che $\|u_0 - v_0\| = d(u_0, F)$. Inoltre, $u_0 - v_0 \in F^\perp$.*

Dimostrazione. Sia $(y_n)$ una successione in $F$ tale che $\lim_n \|u_0 - y_n\| = d(u_0, F)$. Applicando l'identità del parallelogramma a $(u_0 - y_n)$ e $(u_0 - y_m)$, si ha

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - u_0\|^2 + 2\|y_m - u_0\|^2 - 4d(u_0, F).$$

Ne segue che $(y_n)$ è una successione di Cauchy, e quindi converge verso un certo $v_0 \in F$. Chiaramente, si ha $\|u_0 - v_0\| = d(u_0, F)$. Inoltre, $v_0$ è l'unico ad avere questa proprietà, perchè se $v_1$ è tale che $\|u_0 - v_1\| = d(u_0, F)$, applicando l'identità del parallelogramma a $(u_0 - v_0)$ e $(u_0 - v_1)$ si vede che

$$\|v_0 - v_1\|^2 = 4d\langle u_0, F\rangle - 4\|u_0 - \frac{1}{2}(v_0 + v_1)\|^2 \leq 0,$$

e perciò $v_0 = v_1$. Infine, se per assurdo ci fosse un $w \in F$ tale che $\langle u_0 - v_0, w\rangle \neq 0$, allora, posto $w' = v_0 + \frac{\langle u_0 - v_0, w\rangle}{\|w\|^2} w \in F$, con semplici passaggi si ottiene

$$\|u_0 - w'\|^2 = \|u_0 - v_0\|^2 - \left(\frac{|\langle w, u_0 - v_0\rangle|}{\|w\|}\right)^2 < d(u_0, F),$$

una contraddizione. ■

L'applicazione che a $u_0$ associa $v_0$ si dice proiezione ortogonale su $F$, e si indica con $P_F$. Si vede allora che se $F$ è un sottospazio chiuso di $H$, si ha che $H = F \oplus F^\perp$.

**Corollario 1.2.** *Un sottospazio $E$ è denso in un sottospazio $F$ se e solo se $E^\perp \cap F = \{0\}$.*

Dimostrazione. Se $E$ non è denso in $F$, sia $u_0 \in F \backslash \bar{E}$. Allora $w_0 = u_0 - P_{\bar{E}} u_0 \in F \backslash \{0\}$ è tale che $w_0 \in E^\perp$. Viceversa, se $E$ è denso in $F$,

$$E^\perp \cap F = \bar{E}^\perp \cap F = F^\perp \cap F = \{0\}.$$

■

**Corollario 1.3.** *Per ogni sottospazio $E$ di $H$, $(E^\perp)^\perp = \bar{E}$.*

Dimostrazione. Chiaramente, $E \subset (E^\perp)^\perp$, e siccome $(E^\perp)^\perp$ è chiuso, $\bar{E} \subset (E^\perp)^\perp$. D'altra parte, se non valesse l'uguaglianza, si potrebbe trovare un $u_0 \in (E^\perp)^\perp \backslash \{0\}$ tale che $u_0 \in E^\perp$. Ciò è assurdo, in quanto $H = E^\perp \oplus (E^\perp)^\perp$. ■

**Corollario 1.4.** *Ogni funzionale lineare continuo $f : H \to \mathbf{K}$ è necessariamente della forma*

$$f(u) = \langle u, v \rangle,$$

*per un certo $v \in H$.*

Dimostrazione. Sia $E = \{u \in H : f(u) = 0\}$. Si verifica facilmente che $E$ è un sottospazio chiuso di $H$. Se $E = H$, basta prendere $v = 0$; altrimenti, scegliamo un $w \in E^\perp$, e poniamo $v = \frac{f(w)^*}{\|w\|^2} w$. Allora $f(v) = \|v\|^2$, e per ogni $u \in H$ si ha che $u - \frac{f(u)}{f(v)} v \in E$. Quindi,

$$\langle u, v \rangle = \left\langle u - \frac{f(u)}{f(v)} v, v \right\rangle + \frac{f(u)}{f(v)} \|v\|^2 = f(u).$$

■

**Corollario 1.5.** *Lo spazio $H$ ha dimensione finita se e solo se la palla unitaria chiusa $\bar{B}_1$ è compatta.*

Dimostrazione. Se $H$ ha dimensione finita, è noto che $\bar{B}_1$ è compatta. Se $H$ ha dimensione infinita, sia $(E_n)$ una successione di sottospazi di $H$, $E_n$ avente dimensione $n$, tali che $E_n \subset E_{n+1}$. Costruisco una successione $(u_n)$ in $\bar{B}_1$ ponendo $u_0 = 0$ e, per ogni $n$, $u_{n+1} \in E_{n+1} \cap E_n^\perp$ tale che $\|u_{n+1}\| = 1$. Allora $\|u_{n+1} - u_n\| \geq 1$, e quindi $(u_n)$ non può avere sottosuccessioni convergenti. In conclusione, $\bar{B}_1$ non è compatta. ■

## 2 Operatori lineari

Una applicazione lineare $L : \mathcal{D}(L) \subset H \to H$, dove $\mathcal{D}(L)$ è un sottospazio di $H$, si dirà un **operatore** in $H$. Definiamo il **nucleo** di $L$:

$$\mathcal{N}(L) = \{u \in \mathcal{D}(L) : Lu = 0\},$$

l'**immagine** di $L$:

$$\mathcal{I}(L) = \{Lu : u \in \mathcal{D}(L)\},$$

e il **grafico** di $L$:

$$\mathcal{G}(L) = \{(u, Lu) \in H \times H : u \in \mathcal{D}(L)\}.$$

Se $H$ è uno spazio avente dimensione infinita, un operatore in $H$ può non essere continuo (considereremo in $\mathcal{D}(L)$ la topologia indotta da $H$).

Qualora un operatore $L$ in $H$ risulti continuo, esso può essere esteso alla chiusura di $\mathcal{D}(L)$ per uniforme continuità. Se $\mathcal{D}(L)$ non è denso in $H$, è possibile ulteriormente estendere $L$ a tutto $H$, ponendolo ad esempio uguale a 0 sullo spazio ortogonale a $\overline{\mathcal{D}(L)}$, e quindi definendolo su tutto $H$ per linearità.

Indicheremo con $\mathcal{L}(H)$ l'insieme degli operatori continui definiti su tutto $H$. Si vede facilmente che $\mathcal{L}(H)$ è munito della **norma**

$$\|L\| = \sup_{\|u\|=1} \|Lu\|,$$

rispetto alla quale risulta essere completo. Inoltre, dati $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(H)$, si ha che $L_1 L_2 \in \mathcal{L}(H)$, e vale la seguente disuguaglianza:

$$\|L_1 L_2\| \leq \|L_1\| \, \|L_2\|.$$

Per quanto visto sopra, ogni operatore continuo può essere sempre pensato come restrizione di un operatore di $\mathcal{L}(H)$.

Avendo a che fare con operatori possibilmente non continui, è utile introdurre un sostituto della continuità. Introducendo in $H \times H$ il prodotto scalare

$$\langle (u, v), (u', v') \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v' \rangle,$$

si verifica facilmente che $H \times H$ diventa uno spazio di Hilbert, e la topologia indotta è la topologia prodotto. Un operatore $L$ in $H$ si dice **chiuso** se $\mathcal{G}(L)$ è chiuso in $H \times H$. In altre parole, $L$ è chiuso se per ogni successione $(u_n)$ in $\mathcal{D}(L)$ tale che $u_n \to u$ e $Lu_n \to v$, si ha che $u \in \mathcal{D}(L)$ e $v = Lu$. Ne segue che, se $L$ è chiuso, allora $\mathcal{N}(L)$ è chiuso.

**Teorema 2.1.** *Un operatore continuo $L$ in $H$ risulta chiuso se e solo se $\mathcal{D}(L)$ è chiuso.*

Dimostrazione. Supponiamo che $L$ sia chiuso. Sia $(u_n)$ una successione in $\mathcal{D}(L)$ tale che $u_n \to u$. Siccome $L$ è continuo, la successione $(Lu_n)$ è di Cauchy, e perciò converge verso un certo $v \in H$. Essendo $L$ chiuso, ne segue che $u \in \mathcal{D}(L)$, e ciò dimostra che $\mathcal{D}(L)$ è chiuso.

Viceversa, se $\mathcal{D}(L)$ è chiuso, presa una successione $(u_n)$ tale che $u_n \to u$ e $Lu_n \to v$, si ha che $u \in \mathcal{D}(L)$, e, per la continuità di $L$, $Lu = v$. Ciò dimostra che $L$ è chiuso. ∎

Dato l'operatore $L$ in $H$, vogliamo definire il suo operatore **aggiunto** $L^*$. Il suo dominio $\mathcal{D}(L^*)$ consisterà di tutti i $v \in H$ per i quali il funzionale $u \to \langle Lu, v\rangle$ risulti continuo su $\mathcal{D}(L)$. Per ogni $v \in \mathcal{D}(L^*)$, tale funzionale può essere esteso ad un funzionale continuo su tutto $H$ come visto sopra, e per il corollario 1.4 esiste un elemento $L^*v$ in $H$ per cui

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, L^*v\rangle,$$

per ogni $u \in \mathcal{D}(L)$ e $v \in \mathcal{D}(L^*)$. Per il corollario 1.2, tale elemento è unico se e soltanto se $\mathcal{D}(L)$ è denso in $H$. In tal caso, $L^* : \mathcal{D}(L^*) \subset H \to H$ risulta essere un operatore in $H$. Per poter considerare l'operatore $L^*$, da ora in poi considereremo soltanto operatori $L$ definiti in un sottospazio denso in $H$. Scriveremo in tal caso che $L$ è **d.d.** in $H$.

**Teorema 2.2.** *Se $L$ è un operatore d.d. in $H$ e $A \in \mathcal{L}(H)$, allora $(L+A)^* = L^* + A^*$.*

Dimostrazione. Per ogni $u \in \mathcal{D}(L)$, $v \in \mathcal{D}(L^*)$, si ha

$$\langle (L+A)u, v\rangle = \langle u, (L^* + A^*)v\rangle.$$

Quindi, $v \in \mathcal{D}((L+A)^*)$ e $(L+A)^*v = L^*v + A^*v$. D'altra parte, se $w \in \mathcal{D}((L+A)^*)$, posto $z = (L+A)^*w$, per ogni $u \in \mathcal{D}(L)$ abbiamo

$$\langle (L+A)u, w\rangle = \langle u, z\rangle,$$

e perciò

$$\langle Lu, w\rangle = \langle u, z\rangle - \langle Au, w\rangle = \langle u, z - A^*w\rangle.$$

Quindi $w \in \mathcal{D}(L^*)$, e possiamo concludere che $\mathcal{D}((L+A)^*) = \mathcal{D}(L^*) = \mathcal{D}(L^* + A^*)$. Ne segue la tesi. ∎

**Teorema 2.3.** *Se $L$ è un operatore d.d. in $H$, $L^*$ è chiuso.*

Dimostrazione. Sia $(v_n)$ una successione in $\mathcal{D}(L^*)$ tale che $v_n \to v$ e $L^*v_n \to w$. Allora, per ogni $u \in \mathcal{D}(L)$ si ha che

$$\langle Lu, v\rangle = \lim_n \langle Lu, v_n\rangle = \lim_n \langle u, L^*v_n\rangle = \langle u, w\rangle.$$

Ne segue che $v \in \mathcal{D}(L^*)$ e $L^*v = w$. ∎

**Teorema 2.4.** *Se $L$ è un operatore chiuso d.d. in $H$, allora $L^*$ è d.d. in $H$ e $L^{**} = L$.*

Dimostrazione. Sia $w \in H$ tale che

$$\langle w, v\rangle = 0 \text{ per ogni } v \in \mathcal{D}(L^*).$$

Se $w \neq 0$, abbiamo che $(0, w) \notin \mathcal{G}(L)$. Quindi, posto $(f, g) = (0, w) - P_{\mathcal{G}(L)}(0, w)$, abbiamo che $(f, g) \in \mathcal{G}(L)^{\perp}$, ossia

$$\langle f, u\rangle + \langle g, Lu\rangle = 0 \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{D}(L),$$

per cui $g \in \mathcal{D}(L^*)$ e

$$\langle g, w\rangle = \langle (f, g), (0, w)\rangle = \|(f, g)\|^2 \neq 0,$$

una contraddizione. Quindi deve essere $w = 0$, e ciò prova che $\mathcal{D}(L^*)$ è denso in $H$, per il corollario 1.2. Dimostriamo che $L = L^{**}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
(v, w) \in \mathcal{G}(L^*) &\Leftrightarrow \langle Lu, v\rangle = \langle u, w\rangle \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{D}(L) \\
&\Leftrightarrow -\langle u, w\rangle + \langle Lu, v\rangle = 0 \quad \text{per ogni } u \in \mathcal{D}(L) \\
&\Leftrightarrow (-w, v) \in \mathcal{G}(L)^{\perp},
\end{aligned}$$

e perciò:

$$\begin{aligned}
(u, v) \in \mathcal{G}(L^{**}) &\Leftrightarrow (-v, u) \in \mathcal{G}(L^*)^{\perp} \\
&\Leftrightarrow \langle (-v, u), (f, g)\rangle = 0 \quad \text{per ogni } (f, g) \in \mathcal{G}(L^*) \\
&\Leftrightarrow \langle (-v, u), (g', -f')\rangle = 0 \quad \text{per ogni } (f', g') \in \mathcal{G}(L)^{\perp} \\
&\Leftrightarrow \langle (u, v), (f', g')\rangle = 0 \quad \text{per ogni } (f, g) \in \mathcal{G}(L)^{\perp} \\
&\Leftrightarrow (u, v) \in (\mathcal{G}(L)^{\perp})^{\perp}.
\end{aligned}$$

Siccome $\mathcal{G}(L)$ è chiuso, per il corollario 1.3 si ha $\mathcal{G}(L^{**}) = (\mathcal{G}(L)^{\perp})^{\perp} = \mathcal{G}(L)$. ∎

**Teorema 2.5.** *Se $L$ è un operatore chiuso d.d. in $H$, allora*

$$\mathcal{N}(L) = \mathcal{I}(L^*)^\perp.$$

<u>Dimostrazione</u>. Per ogni $u \in \mathcal{D}(L)$, le seguenti proposizioni sono equivalenti.

$$Lu = 0,$$

$$\langle Lu, v\rangle = 0 \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{D}(L^*),$$

$$\langle u, L^*v\rangle = 0 \quad \text{per ogni } v \in \mathcal{D}(L^*),$$

$$u \in \mathcal{I}(L^*)^\perp.$$

■

Se $L$ è iniettivo su $\mathcal{D}(L)$, possiamo definire $L^{-1}$, l'**operatore inverso** di $L$, tale che $\mathcal{D}(L^{-1}) = \mathcal{I}(L)$ e

$$L^{-1}(Lu) = u$$

per ogni $u \in \mathcal{D}(L)$. È chiaro dalla definizione che se $L$ è chiuso, lo è anche $L^{-1}$.

**Teorema 2.6.** *Sia $L$ un operatore d.d. in $H$, iniettivo e tale che $\mathcal{I}(L)$ sia denso in $H$. Allora $L^*$ è iniettivo, e $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$.*

<u>Dimostrazione</u>. Per ogni $v \in \mathcal{D}(L^*)$ e $w \in \mathcal{D}(L^{-1})$,

$$\langle L^{-1}w, L^*v\rangle = \langle LL^{-1}w, v\rangle = \langle w, v\rangle,$$

per cui $L^*v \in \mathcal{D}((L^{-1})^*)$ e $(L^{-1})^*L^*v = v$. D'altra parte, per ogni $u \in \mathcal{D}(L)$ e $y \in \mathcal{D}((L^{-1})^*)$,

$$\langle Lu, (L^{-1})^*y\rangle = \langle L^{-1}Lu, y\rangle = \langle u, y\rangle,$$

per cui $(L^{-1})^*y \in \mathcal{D}(L^*)$ e $L^*(L^{-1})^*y = y$. Possiamo concludere che $\mathcal{D}((L^{-1})^*) = \mathcal{I}(L^*)$, e si ha la tesi. ■

Nella teoria che segue sarà conveniente supporre $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, ossia considerare il caso di uno spazio di Hilbert complesso. Il caso di uno spazio di Hilbert reale verrà trattato nella sezione 6.

Chiameremo **autovalore** di un operatore $L$ ogni $\lambda \in \mathbf{C}$ tale che $L - \lambda I$ non sia iniettivo, dove con $I$ abbiamo indicato l'operatore identità su $H$. In altre parole, $\lambda$ è un autovalore se esiste un $u \in \mathcal{D}(L)\backslash\{0\}$ tale che

$$Lu = \lambda u.$$

Chiameremo molteplicità dell'autovalore $\lambda$ la dimensione di $\mathcal{N}(L - \lambda I)$.

L'insieme dei $\lambda \in \mathbf{C}$ tali che $L - \lambda I$ abbia un inverso $(L - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ è detto **insieme risolvente** di $L$ ed è indicato con $\rho(L)$. Il suo complementare è detto lo **spettro** di $L$ ed è indicato con $\sigma(L)$. Se $\lambda \in \rho(L)$, l'operatore $(L - \lambda I)^{-1}$ verrà detto il **risolvente** di $L$ in $\lambda$.

Si vede facilmente che, se $\rho(L) \neq \emptyset$, allora $L$ è necessariamente un operatore chiuso.

**Teorema 2.7.** *Se $L$ è un operatore d.d. e chiuso in $H$, allora*

$$\lambda \in \sigma(L) \Leftrightarrow \lambda^* \in \sigma(L^*).$$

Dimostrazione. È una immediata conseguenza dei teoremi 2.2 e 2.6. ■

**Teorema 2.8.** *Sia $L$ un operatore in $H$, tale che $0 \in \rho(L)$. Allora*

$$\lambda \in \sigma(L) \Leftrightarrow \lambda^{-1} \in \sigma(L^{-1}).$$

Dimostrazione. Per ogni $\lambda \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$, si ha

$$L - \lambda I = -\lambda[L^{-1} - \lambda^{-1} I]L.$$

Ne segue la tesi. ■

È chiaro che ogni eventuale autovalore è un elemento dello spettro. Se $H$ ha dimensione finita, si può vedere che ogni elemento dello spettro è un autovalore. Ciò non è vero in generale se $H$ ha dimensione infinita.

**Teorema 2.9.** *Se $L \in \mathcal{L}(H)$, allora*

$$\sigma(L) \subset B[0, \|L\|],$$

*dove $B[0, r] = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq r\}$.*

Dimostrazione. Sia $T : H \to H$ definito da

$$Tu = \frac{1}{\lambda}(Lu - v).$$

Allora, per ogni $v \in H$, l'equazione

$$Lu - \lambda u = v$$

ha come soluzioni tutti e soli i punti fissi di $T$. D'altra parte, è facile constatare che, se $\lambda \in \mathbf{C}$ è tale che $|\lambda| > \|L\|$, $T$ è una contrazione, e pertanto ha uno ed un solo punto fisso $u \in H$. Inoltre, si ha

$$\|u\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|L\|} \|v\|.$$

Perciò, se $|\lambda| > \|L\|$, $L - \lambda I$ ha inverso in $\mathcal{L}(H)$. ∎

**Corollario 2.10.** *Sia $L$ un operatore in $H$ tale che $0 \in \rho(L)$. Se $A \in \mathcal{L}(H)$ è tale che*

$$\|A\| < \frac{1}{\|L^{-1}\|},$$

*allora $0 \in \rho(L + A)$.*

Dimostrazione. Si ha che $(L + A)L^{-1} = I + AL^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Inoltre,

$$\|I - (L + A)L^{-1}\| = \|AL^{-1}\| \leq \|A\| \, \|L^{-1}\| < 1.$$

Quindi, per il teorema 2.9, abbiamo che $1 \in \rho(I - (L + A)L^{-1})$. In altre parole, $(L + A)L^{-1}$ ha un inverso in $\mathcal{L}(H)$. Ne segue che anche $(L + A)$ ha un inverso $(L + A)^{-1} = L^{-1}[(L + A)L^{-1}]^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. ∎

**Corollario 2.11.** *Lo spettro di un operatore in $H$ è chiuso.*

Dimostrazione. Consideriamo un operatore $L$ in $H$. Se $\rho(L) = \emptyset$, la tesi è banale. Altrimenti, fissiamo $\lambda \in \rho(L)$, e consideriamo un $\mu \in \mathbf{C}$ tale che $|\mu - \lambda| < 1/\|(L - \lambda I)^{-1}\|$. Allora, per il corollario 2.10, $L + \mu I = L + \lambda I + (\mu - \lambda)I$ è tale che $0 \in \rho(L + \mu I)$, ossia $\mu \in \rho(L)$. Perciò $\rho(L)$ è un insieme aperto, e quindi $\sigma(L)$ è chiuso. ∎

# 3 Operatori compatti

Diremo che un operatore $L$ in $H$ è **compatto** se trasforma insiemi limitati in insiemi relativamente compatti. Equivalentemente, un operatore è compatto se la successione immagine di ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente.

È immediato verificare che ogni operatore compatto è continuo. Inoltre, se $L$ è un operatore compatto e $A \in \mathcal{L}(H)$, allora $LA$ e $AL$ sono operatori compatti.

**Teorema 3.1.** *Sia $L \in \mathcal{L}(H)$ compatto. Allora anche $L^*$ è compatto.*

<u>Dimostrazione</u>. Sia $(v_n)$ una successione in $H$ limitata in norma da una costante $C > 0$. Allora

$$\begin{aligned}
\|L^* v_n - L^* v_m\|^2 &= \langle L^*(v_n - v_m), L^*(v_n - v_m)\rangle \\
&= \langle LL^*(v_n - v_m), v_n - v_m\rangle \\
&\leq 2C\|LL^* v_n - LL^* v_m\|.
\end{aligned}$$

Essendo $LL^*$ compatto, per una sottosuccessione, $(LL^* v_n)$ converge. Allora $(L^* v_n)$ è di Cauchy, e pertanto converge. Ciò dimostra che $L^*$ è compatto. ∎

**Teorema 3.2.** *Se $L$ è un operatore in $H$ chiuso e compatto, allora $\sigma(L)\backslash\{0\}$ è costituito soltanto da autovalori isolati di molteplicità finita.*

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo per assurdo che $\lambda \in \sigma(L)\backslash\{0\}$ non sia un autovalore. Di conseguenza, $H$ sarà supposto avere dimensione infinita.

Dimostriamo dapprima che $\mathcal{I}(L - \lambda I)$ è un sottospazio chiuso in $H$. Sia $(u_n)$ tale che $Lu_n - \lambda u_n \to x$, per un certo $x \in H$. Vogliamo dimostrare che $x \in \mathcal{I}(L - \lambda I)$. Indichiamo con $P$ la proiezione ortogonale sul sottospazio chiuso $\mathcal{N}(L - \lambda I)$. Dimostriamo che la successione $(\|u_n - Pu_n\|)$ è limitata. Se così non fosse, per una sottosuccessione avremmo che $\|u_n - Pu_n\| \to \infty$. Sia $w_n = \frac{u_n - Pu_n}{\|u_n - Pu_n\|}$. Allora $Lw_n - \lambda w_n \to 0$, e siccome $L$ è compatto e $(w_n)$ è limitata, per una sottosuccessione si avrà che $Lw_n \to y$, per un certo $y \in H$. Allora $w_n \to (1/\lambda)y$, e $y \in \mathcal{N}(L - \lambda I)$. Ma, per ogni $n$, $d(w_n, \mathcal{N}(L - \lambda I)) = 1$, e si ha una contraddizione. Quindi, $(\|u_n - Pu_n\|)$ è limitata, e siccome $L$ è compatto, per una sottosuccessione si ha che $L(u_n - Pu_n) \to z$, per un certo $z \in H$. Allora

$$u_n - Pu_n = \frac{1}{\lambda}[(\lambda u_n - Lu_n) + (Lu_n - LPu_n) + (LPu_n - \lambda Pu_n)] \to \frac{1}{\lambda}(z - x) := \xi,$$

e inoltre $z = L\xi$. Si ha:

$$(L - \lambda I)\xi = z - \lambda\xi = x.$$

Ciò dimostra che $\mathcal{I}(L-\lambda I)$ è chiuso.

Dimostriamo che $(L-\lambda I)$ è biiettivo. Sia $E_1 = \mathcal{I}(L-\lambda I)$. Si ha che $E_1$ è un sottospazio chiuso di $H$, e $L(E_1) \subset E_1$, per cui la restrizione di $L$ a $E_1$ è un operatore compatto di $\mathcal{L}(E_1)$. Supponiamo per assurdo che $E_1 \neq H$. Considero allora $E_2 = (L-\lambda I)(E_1)$. Si ha che $E_2$ è un sottospazio chiuso di $E_1$, $E_2 \neq E_1$ in quanto $(L-\lambda I)$ è iniettivo, non essendo $\lambda$ un autovalore, e $L(E_2) \subset E_2$. Iterando questo procedimento, definiamo così una successione di sottospazi chiusi $E_n = (L-\lambda I)^n(H)$ contenuti propriamente l'uno nell'altro. Possiamo allora costruire una successione $(u_n)$ in $H$ in questo modo: $u_n \in E_n \cap E_{n+1}^{\perp}$ e $\|u_n\| = 1$. Presi $n, m$ arbitrariamente, si ha

$$Lu_n - Lu_m = (L-\lambda I)u_n - (L-\lambda I)u_m + \lambda(u_n - u_m).$$

Se $n > m$, $(L-\lambda I)u_n - (L-\lambda I)u_m + \lambda u_n \in E_{m+1}$, e siccome $d(u_m, E_{m+1}) = 1$, si ha che $\|Lu_n - Lu_m\| \geq \lambda$, il che è assurdo, in quanto $L$ è supposto compatto e $(u_n)$ è limitata. Quindi, $(L-\lambda I)$ è biiettivo.

Dimostriamo che $(L-\lambda I)^{-1}$ è continuo. Sia $(v_n)$ tale che $v_n \to v$, per un certo $v \in H$, e sia $u_n$ tale che $Lu_n - \lambda u_n = v_n$. Vogliamo vedere che $(u_n)$ converge ad un certo $u$ tale che $Lu - \lambda u = v$. Dimostriamo che $(u_n)$ è limitata. Se così non fosse, ci sarebbe una sottosuccessione per cui $\|u_n\| \to \infty$. Allora, posto $w_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ e ragionando come sopra, si ha che, per una sottosuccessione, $w_n \to z$, per un certo $z \in H$, e $Lz = \lambda z$. Ne segue che $z = 0$, il che è assurdo in quanto $\|w_n\| = 1$. Quindi, $(u_n)$ è limitata, e, per una sottosuccessione, $(Lu_n)$ converge. Ne segue che esiste un $u \in H$ tale che la sottosuccessione $u_n \to u$ e $Lu - \lambda u = v$. Notiamo ora che si ottiene la stessa conclusione se si parte da una qualunque sottosuccessione di $(u_n)$. Inoltre, il limite $u$ a cui si perviene non può che essere unico, perchè se ce ne fosse un altro, $u' \neq u$, si avrebbe che $L(u-u') = \lambda(u-u')$, una contraddizione.

Abbiamo quindi dimostrato che tutti gli elementi di $\sigma(L)\backslash\{0\}$ sono autovalori. Vediamo ora che hanno molteplicità finita. Siccome $\bar{B}_1 \cap \mathcal{N}(L-\lambda I) \subset (1/\lambda)L(\bar{B}_1)$, si ha che $\bar{B}_1 \cap \mathcal{N}(L-\lambda I)$ è compatta, e, per il corollario 1.5, $\mathcal{N}(L-\lambda I)$ ha dimensione finita.

Ci resta infine da dimostrare che tutti gli elementi di $\sigma(L)\backslash\{0\}$ sono isolati. Supponiamo per assurdo che esista una successione $(\lambda_n)$ di punti distinti di $\sigma(L)\backslash\{0\}$ che converge a un certo $\lambda \neq 0$. Per ogni $n$, esiste un $e_n \in \mathcal{D}(L)\backslash\{0\}$ tale che $Le_n = \lambda_n e_n$. Ragionando per induzione, si può vedere che gli $e_n$ sono tutti linearmente indipendenti. Sia $F_n$ lo spazio generato da

$\{e_1, ..., e_n\}$. Si ha che $F_n \subset F_{n+1}$, $F_n \neq F_{n+1}$ e $(L - \lambda_n I)(F_n) \subset F_{n-1}$. Sia $(u_n)$ una successione tale che $u_n \in F_n \cap F_{n-1}^{\perp}$ e $\|u_n\| = 1$. Se $2 \leq m < n$, si ha

$$\left\| \frac{Lu_n}{\lambda_n} - \frac{Lu_m}{\lambda_m} \right\| = \left\| \left( \frac{Lu_n - \lambda_n u_n}{\lambda_n} - \frac{Lu_m - \lambda_m u_m}{\lambda_m} - u_m \right) + u_n \right\| \geq 1.$$

Siccome $\lambda_n \to \lambda \neq 0$, questo è in contraddizione con il fatto che $(Lu_n)$ ha una sottosuccessione convergente. ∎

# 4 Operatori con risolvente compatto

Diremo che un operatore $L$ in $H$ ha **risolvente compatto** se esiste un $\lambda \in \rho(L)$ tale che il risolvente di $L$ in $\lambda$ sia compatto.

**Teorema 4.1.** *Siano $L$ un operatore in $H$ avente risolvente compatto e $A \in \mathcal{L}(H)$. Se $\mathcal{N}(L - A) = \{0\}$, allora $0 \in \rho(L - A)$ e $(L - A)^{-1}$ è compatto.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(L)$. Allora

$$L - A = [I - (A - \lambda I)(L - \lambda I)^{-1}](L - \lambda I),$$

per cui

$$\mathcal{N}(I - (A - \lambda I)(L - \lambda I)^{-1}) = \mathcal{N}(L - A) = \{0\}.$$

Dunque, 1 non è un autovalore dell'operatore compatto $(A - \lambda I)(L - \lambda I)^{-1}$, e, per il teorema 3.2, $1 \in \rho((A - \lambda I)(L - \lambda I)^{-1})$. Ne segue che $(I - (A - \lambda I)(L - \lambda I)^{-1})^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ e si ha

$$(L - A)^{-1} = (L - \lambda I)^{-1}(I - (A - \lambda I)(L - \lambda I)^{-1})^{-1}.$$

∎

Come facile conseguenza del teorema 4.1 si vede che, se $L$ ha risolvente compatto, $(L - \mu I)^{-1}$ è compatto, per ogni $\mu \in \rho(L)$.

**Teorema 4.2.** *Sia $L$ un operatore d.d. in $H$ avente risolvente compatto. Allora anche $L^*$ ha risolvente compatto.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(L)$. Essendo $(L - \lambda I)^{-1}$ compatto, per il teorema 3.1 si ha che $((L - \lambda I)^{-1})^*$ è compatto. Ma

$$((L - \lambda I)^{-1})^* = ((L - \lambda I)^*)^{-1} = (L^* - \lambda^* I)^{-1},$$

e perciò $L^*$ ha risolvente compatto. ∎

**Teorema 4.3.** *Se un operatore in $H$ ha risolvente compatto, il suo spettro è al più numerabile, ed è costituito soltanto da autovalori isolati di molteplicità finita.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \rho(L)$. Come nella dimostrazione del teorema 2.8,

$$L - \mu I = -(\mu - \lambda)\left[(L - \lambda I)^{-1} - \frac{1}{\mu - \lambda} I\right](L - \lambda I),$$

per cui

$$\mu \in \sigma(L)\backslash\{\lambda\} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu - \lambda} \in \sigma((L - \lambda I)^{-1})\backslash\{0\}.$$

Inoltre,

$$\mathcal{N}(L - \mu I) = \mathcal{N}\left((L - \lambda I)^{-1} - \frac{1}{\mu - \lambda} I\right).$$

La conclusione segue allora dal teorema 3.2. ■

# 5 Operatori autoaggiunti

Un operatore $L$ si dice **autoaggiunto** se coincide con il suo aggiunto. Ciò significa che $L$ è d.d. in $H$, $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L^*)$ e, per ogni $u, v \in \mathcal{D}(L)$, si ha

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle.$$

In particolare, per ogni $u \in \mathcal{D}(L)$, $\langle Lu, u\rangle$ è un numero reale. La somma di due operatori autoaggiunti è un operatore autoaggiunto. In particolare, se $L$ è autoaggiunto, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, $L + \lambda I$ è anch'esso autoaggiunto. Segue inoltre dal teorema 2.3 che ogni operatore autoaggiunto è chiuso.

**Teorema 5.1.** *Se $L \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto, allora*

$$\|L\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle Lu, u\rangle|.$$

Dimostrazione. Siccome

$$|\langle Lu, u\rangle| \leq \|Lu\|\,\|u\| \leq \|L\|\,\|u\|^2,$$

si ha che
$$\sup_{\|u\|=1} |\langle Lu, u\rangle| \leq \|L\|.$$
Sia $w \in H$ tale che $\|w\| = 1$. Poniamo $v = \frac{Lw}{\|Lw\|}$. Allora

$$\begin{aligned}
\|Lw\| &= \frac{1}{4}[\langle L(w+v),(w+v)\rangle - \langle L(w-v),(w-v)\rangle] \\
&\leq \sup_{\|u\|=1} |\langle Lu, u\rangle| \frac{1}{4}[\,\|w+v\|^2 + \|w-v\|^2] \\
&\leq \sup_{\|u\|=1} |\langle Lu, u\rangle| \frac{1}{4}[\,2\|w\|^2 + 2\|v\|^2] \\
&\leq \sup_{\|u\|=1} |\langle Lu, u\rangle|.
\end{aligned}$$

Quindi,
$$\|L\| \leq \sup_{\|u\|=1} |\langle Lu, u\rangle|,$$
e ciò completa la dimostrazione. ∎

Un operatore autoaggiunto non può avere autovalori complessi non reali. Infatti, sia $L$ autoaggiunto, $\lambda$ un suo autovalore e $u \in H\backslash\{0\}$ tale che $Lu = \lambda u$. Allora $\langle Lu, u\rangle = \lambda\|u\|^2$, e siccome $\langle Lu, u\rangle \in \mathbf{R}$, anche $\lambda \in \mathbf{R}$. Più in generale, si ha:

**Teorema 5.2.** *Lo spettro di un operatore autoaggiunto è reale.*

<u>Dimostrazione</u>. Sia $L$ un operatore autoaggiunto in $H$ e sia $\lambda = a + ib$, con $a, b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$. Allora $\lambda$ non può essere un autovalore di $L$. Quindi, possiamo considerare l'inverso $(L-\lambda I)^{-1}$, che è un operatore definito su $\mathcal{I}(L-\lambda I)$. Siccome $(L-\lambda I)$ è chiuso, anche $(L-\lambda I)^{-1}$ lo è. Dimostriamo che è anche continuo. Per ogni $v \in \mathcal{D}((L-\lambda I)^{-1}) = \mathcal{I}(L-\lambda I)$, sia $u = (L-\lambda I)^{-1}v$. Allora:

$$\begin{aligned}
\|v\|^2 &= \|(L-\lambda I)u\|^2 \\
&= \langle (L-aI)u - ibu, (L-aI)u - ibu\rangle \\
&= \|(L-aI)u\|^2 + |b|^2\|u\|^2 \\
&\geq |b|^2\|u\|^2 = |b|^2\|(L-\lambda I)^{-1}v\|^2
\end{aligned}$$

Perciò, $(L - \lambda I)^{-1}$ è chiuso e continuo, e il suo dominio deve essere chiuso. D'altra parte, $\lambda^* = a - ib$ non può essere un autovalore di $L$. Per il teorema 2.5 e il corollario 1.3,

$$H = \mathcal{N}(L - \lambda^* I)^\perp = [\mathcal{I}(L - \lambda I)^\perp]^\perp = \mathcal{I}(L - \lambda I).$$

Quindi, $(L - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$, ossia $\lambda \in \rho(L)$. ∎

Un operatore autoaggiunto $L \in \mathcal{L}(H)$ si dice **monotono** se, per ogni $u \in \mathcal{D}(L)$, si ha

$$\langle Lu, u \rangle \geq 0.$$

In tal caso, scriveremo $L \geq 0$. Dati due tali operatori $L_1$ e $L_2$, scriveremo $L_1 \leq L_2$ se $(L_2 - L_1) \geq 0$.

**Lemma 5.3.** *Se $L \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto e monotono, allora, per ogni $u, v \in H$,*

$$|\langle Lu, v \rangle| \leq \langle Lu, u \rangle^{1/2} \langle Lv, v \rangle^{1/2}.$$

*Inoltre, per ogni $u \in H$,*

$$\|Lu\|^2 \leq \|L\| \langle Lu, u \rangle.$$

Dimostrazione. Per ogni numero reale $\gamma$, sia $w_\gamma = u + \gamma \langle Lu, v \rangle v$. Allora

$$0 \leq \langle Lw_\gamma, w_\gamma \rangle = \langle Lu, u \rangle + 2\gamma |\langle Lu, v \rangle|^2 + \gamma^2 \langle Lv, v \rangle |\langle Lu, v \rangle|^2.$$

Perciò, deve essere $|\langle Lu, v \rangle|^2 - \langle Lu, u \rangle \langle Lv, v \rangle \leq 0$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} \|Lu\|^4 &= |\langle L^2 u, u \rangle|^2 \\ &\leq \langle Lu, u \rangle \langle L^2 u, Lu \rangle \\ &\leq \langle Lu, u \rangle \|L^2 u\| \, \|Lu\| \\ &\leq \langle Lu, u \rangle \|L\| \, \|Lu\|^2, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ∎

**Teorema 5.4.** *Sia $L \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunto. Poniamo*

$$m = \inf_{\|u\|=1} \langle Lu, u \rangle,$$

$$M = \sup_{\|u\|=1} \langle Lu, u \rangle.$$

*Allora* $\sigma(L) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(L)$ *e* $M \in \sigma(L)$.

Dimostrazione. Per quanto riguarda la prima affermazione, è sufficiente considerare l'operatore $L - \frac{1}{2}(m+M)I$, e applicare ad esso i teoremi 2.9 e 5.1. Dimostriamo ora che $m \in \sigma(L)$. Si ha $L - mI \geq 0$. Inoltre, esiste una successione $(u_n)$ tale che $\|u_n\| = 1$ e $\langle (L-mI)u_n, u_n\rangle \leq 1/n$. Se per assurdo $m \in \rho(L)$, usando il lemma 5.3 abbiamo:

$$\begin{aligned} 1 &= \|u_n\|^2 = \|(L-mI)^{-1}(L-mI)u_n\|^2 \\ &\leq \|(L-mI)^{-1}\| \, \|(L-mI)u_n\|^2 \\ &\leq \|(L-mI)^{-1}\| \, \|(L-mI)\| \, \langle (L-mI)u_n, u_n\rangle. \end{aligned}$$

Se $n$ è sufficientemente grande, ottengo una contraddizione. Quindi, $m \in \sigma(L)$, e analogamente si dimostra che $M \in \sigma(L)$. ∎

**Corollario 5.5.** *Se* $L \in \mathcal{L}(H)$ *è autoaggiunto, allora*

$$\|L\| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(L)\}.$$

Dimostrazione. È una immediata conseguenza dei teoremi 5.1 e 5.3. ∎

**Teorema 5.6.** *Sia* $L$ *un operatore autoaggiunto in* $H$ *e* $\lambda \in \rho(L)$. *Allora*

$$\|(L-\lambda I)^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda, \sigma(L))}.$$

Dimostrazione. Per il teorema 2.8,

$$\mu \in \sigma(L) \Leftrightarrow \frac{1}{\mu - \lambda} \in \sigma((L-\lambda I)^{-1}) \backslash \{0\}.$$

Allora, per il corollario 5.5,

$$\|(L-\lambda I)^{-1}\| = \max\left\{\frac{1}{|\mu-\lambda|} : \mu \in \sigma(L)\right\} = [\min\{|(\mu-\lambda)| : \mu \in \sigma(L)\}]^{-1}.$$

∎

**Teorema 5.7.** *Se* $L \in \mathcal{L}(H)$ *è autoaggiunto e monotono, allora esiste un unico operatore* $A \in \mathcal{L}(H)$ *autoaggiunto e monotono tale che* $A^2 = L$. *Se* $0 \in \rho(L)$, *allora* $0 \in \rho(A)$, *e si ha* $(A^{-1})^2 = L^{-1}$.

L'operatore $A$ si dice radice quadrata di $L$, e si indica con $L^{1/2}$. Il suo inverso, quando esiste, verrà indicato con $L^{-1/2}$.

Dimostrazione. Consideriamo l'equazione $A^2 = L$. Operando il cambiamento di variabile $D = I - \|L\|^{-1/2}A$, si ottiene

$$D = \frac{1}{2}\left(I - \frac{L}{\|L\|} + D^2\right) := T(D).$$

Siamo così portati a cercare un punto fisso di $T$. Anche se $T$ non è necessariamente una contrazione, andiamo alla ricerca di un suo punto fisso per mezzo della seguente iterazione di operatori autoaggiunti:

$$\begin{aligned} D_0 &= 0, \\ D_{n+1} &= T(D_n). \end{aligned}$$

Per induzione, si vede che ogni $D_n$ commuta con $L$. Ne segue che, per ogni $n$, $D_n$ commuta con $D_{n+1}$, e si ha:

$$D_{n+2} - D_{n+1} = \frac{1}{2}(D_{n+1} + D_n)(D_{n+1} - D_n),$$

É allora facile dimostrare, per induzione, che, per ogni $n$, si ha

$$0 \leq D_n \leq D_{n+1} \leq I.$$

Presi $n, n'$, se $n < n'$ si vede che $\|D_{n'} - D_n\| \leq 1$, e per il lemma 5.3 si ha

$$\|D_{n'}u - D_n u\|^2 \leq \langle D_{n'}u, u\rangle - \langle D_n u, u\rangle,$$

per ogni $u \in H$. Siccome la successione $(\,\langle D_n u, u\rangle\,)$ è crescente e limitata, essa converge. Per quanto visto sopra, la successione $(D_n u)$ è quindi di Cauchy, e perciò converge, per ogni $u \in H$. Poniamo

$$Du = \lim_n D_n u.$$

È immediato vedere che $D$ è il punto fisso di $T$ cercato. Inoltre, $D$ è autoaggiunto, monotono, $\|D\| \leq 1$, e ponendo $A = \|L\|^{1/2}(I - D)$ si ottiene un operatore autoaggiunto, monotono, tale che $A^2 = L$.

Dimostriamo ora l'unicità. Sia $B$ un operatore autoaggiunto, monotono, tale che $B^2 = L$. Preso $u \in H$, poniamo $v = (A - B)u$. È chiaro che $B$

commuta con $L$. Percio, esso commuta con ognuno dei $D_n$ definiti sopra, quindi con $D$, e perciò anche con $A$. Si ha:

$$\langle (A+B)v, v\rangle = \langle (A+B)(A-B)u, v\rangle = \langle (A^2-B^2)u, v\rangle = 0.$$

Essendo $A$ e $B$ monotoni, ne segue che

$$\langle Av, v\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle Bv, v\rangle = 0.$$

Per il lemma 5.1, si ha $Av = 0$ e $Bv = 0$. Quindi,

$$\|(A-B)u\|^2 = \langle (A-B)u, (A-B)u\rangle = \langle (A-B)^2u, u\rangle = \langle (A-B)v, u\rangle = 0,$$

ossia $Au = Bu$. Ciò dimostra l'unicità.

Supponiamo infine che $0 \in \rho(L)$. Allora $A$ è iniettiva, in quanto

$$Au = 0 \Rightarrow Lu = A(Au) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Quindi,

$$Au = v \Leftrightarrow A^2u = Av \Leftrightarrow u = L^{-1}Av.$$

Si ha dunque che $0 \in \rho(A)$, $A^{-1} = L^{-1}A$ e $(A^{-1})^2 = L^{-1}AA^{-1} = L^{-1}$. ∎

Sia ora $L$ un operatore autoaggiunto in $H$. Considero $\hat{L}$, l'operatore in $H$ restrizione di $L$ a $\mathcal{D}(\hat{L}) = \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{N}(L)^\perp$. Indicata con $P$ la proiezione ortogonale su $\mathcal{N}(L)$, si ha che $L = \hat{L}(I-P)$. Si verifica facilmente che $\hat{L}$ è una biiezione di $\mathcal{D}(\hat{L})$ su $\mathcal{I}(L)$. Posso quindi considerare $\hat{L}^{-1}$, operatore in $H$ avente dominio $\mathcal{D}(\hat{L}^{-1}) = \mathcal{I}(L)$.

**Teorema 5.8.** *$L$ ha risolvente compatto se e solo se $\mathcal{N}(L)$ ha dimensione finita, $\mathcal{I}(L)$ è chiusa e $\hat{L}^{-1}$ è compatto.*

<u>Dimostrazione</u>. Supponiamo che $L$ abbia risolvente compatto, e fissiamo un $\lambda \in \rho(L)$. Per il teorema 4.3, $\mathcal{N}(L)$ ha dimensione finita. Dimostriamo che $\mathcal{I}(L)$ è chiusa. Sia $(v_n)$ tale che $v_n = Lu_n \to v$. Allora

$$u_n - Pu_n = (L-\lambda I)^{-1}(v_n - \lambda(u_n - Pu_n)).$$

In maniera analoga alla prima parte della dimostrazione del teorema 3.2, si vede che $(u_n - Pu_n)$ è limitata. Allora, per una sottosuccessione,

$$u_n - Pu_n \to u = (L-\lambda I)^{-1}(v - \lambda u).$$

Quindi, $Lu = v$, il che dimostra che $\mathcal{I}(L)$ è chiusa. Nello stesso modo si dimostra che, se $(v_n)$ è una successione limitata in $\mathcal{I}(L)$, allora $u_n = \hat{L}^{-1}v_n$ ha una sottosuccessione convergente. Quindi, $\hat{L}^{-1}$ è compatto.

Viceversa, supponiamo che $\mathcal{N}(L)$ abbia dimensione finita, $\mathcal{I}(L)$ sia chiusa e $\hat{L}^{-1}$ sia compatto, e fissiamo un $\lambda \in \rho(\hat{L})\backslash\{0\}$. L'equazione

$$Lu - \lambda u = v$$

è equivalente al sistema

$$(HS) \qquad \begin{cases} -\lambda P u = P v \\ \hat{L}(I-P)u - \lambda(I-P)u = (I-P)v, \end{cases}$$

e quindi all'equazione

$$u = -\frac{1}{\lambda} P v + (\hat{L} - \lambda I)^{-1}(I-P)v.$$

Ne segue che $\lambda \in \rho(L)$ e si ha che

$$(L - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} P + (\hat{L} - \lambda I)^{-1}(I-P)$$

è compatto. ∎

# 6 Operatori in spazi di Hilbert reali

Nel caso si voglia trattare il caso di uno spazio di Hilbert $H$ reale, si può procedere operando una "complessificazione" dello spazio. Si considera cioè lo spazio $H^c$ definito formalmente come $H \oplus iH$, i cui elementi sono del tipo $x + iy$, con $x, y \in H$. In esso si definisce il prodotto scalare

$$\langle x + iy, x' + iy' \rangle = \langle x, x' \rangle - i\langle x, y' \rangle + i\langle y, x' \rangle + \langle y, y' \rangle,$$

che lo rende uno spazio di Hilbert complesso, con la relativa norma

$$||x + iy|| = (||x||^2 + ||y||^2)^{1/2}.$$

Un operatore $L : \mathcal{D}(L) \subset H \to H$ avrà un complessificato $L^c : \mathcal{D}(L)^c \subset H^c \to H^c$, dove $\mathcal{D}(L)^c = \mathcal{D}(L) \oplus i\mathcal{D}(L)$, così definito:

$$L^c(x + iy) = Lx + iLy.$$

Le seguenti proposizioni non sono difficili da verificare, per cui preferiamo omettere le dimostrazioni.

**Proposizione 6.1.** *Si ha che* $L \in \mathcal{L}(H)$ *se e solo se* $L^c \in \mathcal{L}(H^c)$, *e in tal caso*
$$||L|| = ||L^c||.$$

**Proposizione 6.2.** *L'operatore* $L$ *è chiuso in* $H$ *se e solo se il suo complessificato* $L^c$ *è chiuso in* $H^c$.

**Proposizione 6.3.** $L$ *è d.d. se e solo se lo è* $L^c$ *e, considerando gli operatori aggiunti, si ha:*
$$(L^*)^c = (L^c)^*.$$
*In particolare,* $L$ *è autoaggiunto se e solo se lo è* $L^c$.

Si noti che il Teorema 5.1 vale anche per operatori autoaggiunti $L \in \mathcal{L}(H)$ in uno spazio di Hilbert reale, per cui si ha

$$||L|| = \sup_{||u||=1} |\langle Lu, u\rangle|.$$

Per quanto concerne gli operatori inversi, vale la seguente

**Proposizione 6.4.** $L$ *è iniettivo su* $\mathcal{D}(L)$ *se e solo se* $L^c$ *è iniettivo su* $\mathcal{D}(L^c)$, *e in tal caso si ha:*
$$(L^{-1})^c = (L^c)^{-1}.$$

Chiamiamo **autovalore** di $L$ ogni possibile autovalore di $L^c$. Pertanto, l'operatore $L$, pur essendo reale, può avere autovalori complessi. Nello stesso modo si definiscono l'**insieme risolvente** $\rho(L)$, e lo **spettro** $\sigma(L)$ : sono quelli relativi a $L^c$.

Per quanto riguarda la compattezza, abbiamo la seguente

**Proposizione 6.5.** *L'operatore* $L$ *è compatto in* $H$ *se e solo se il suo complessificato* $L^c$ *è compatto in* $H^c$.

Diremo che $L$ ha **risolvente compatto** se ciò vale per $L^c$. Il Teorema 5.8 continua a valere con lo stesso enunciato e, in vista del Teorema 4.3, abbiamo:

**Proposizione 6.6.** $L$ *ha risolvente compatto se e solo se esiste un* $\lambda \in \rho(L)$ *reale per cui* $(L - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ *è compatto.*

È infine di facile verifica la seguente proposizione riguardante la radice quadrata dell'operatore $L$.

**Proposizione 6.7.** *$L$ è autoaggiunto e monotono se e solo se lo è $L^c$, nel qual caso si ha*

$$(L^{1/2})^c = (L^c)^{1/2}.$$

# 7 Equazioni semilineari

In questa sezione, $H$ sarà uno spazio di Hilbert reale o complesso. Per comodità ci riferiremo alla teoria sviluppata per gli spazi complessi, ma sappiamo dalla sezione 6 che essa si adatta anche al caso degli spazi reali.

Sia $L : \mathcal{D}(L) \subset H \to H$ un operatore autoaggiunto, e $N : H \to H$ un'applicazione continua. Consideriamo nello spazio di Hilbert $H$ l'equazione

$$Lu = Nu. \tag{1}$$

Dimostreremo dapprima un risultato di esistenza e unicità per le soluzioni dell'equazione (1) facendo uso del teorema delle contrazioni.

**Teorema 7.1.** *Supponiamo $N$ differenziabile secondo Gateaux, tale che, per ogni $u \in H$, $N'(u) \in \mathcal{L}(H)$ sia autoaggiunto. Siano $A, B \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunti, tali che*

$$\begin{array}{ll} (i) & A \leq N'(u) \leq B \quad \text{per ogni } u \in H, \\ (ii) & 0 \in \rho(L - (1-\mu)A - \mu B) \quad \text{per ogni } \mu \in [0,1]. \end{array}$$

*Allora l'equazione (1) ha una ed una sola soluzione $u \in \mathcal{D}(L)$ che può essere ottenuta come limite del processo iterativo definito da*

$$Lu_{k+1} - \frac{1}{2}(A+B)u_{k+1} = Nu_k - \frac{1}{2}(A+B)u_k,$$

*con $u_0 \in H$ arbitrario.*

<u>Dimostrazione</u>. Per prima cosa, dimostriamo che, esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$0 \in \rho(L - (1-\mu)(A - \epsilon I) - \mu(B + \epsilon I)),$$

per ogni $\mu \in [0,1]$. Infatti, per il corollario 2.10, per ogni $\mu \in [0,1]$ fissato, esiste un $\epsilon(\mu) > 0$ tale che $0 \in \rho(L - (1-\mu)(A - \epsilon(\mu)I) - \mu(B + \epsilon(\mu)I))$. Esiste inoltre un $\delta(\mu) > 0$ tale che, per ogni $\nu \in ]\mu - \delta(\mu), \mu + \delta(\mu)[$ si ha che

$0 \in \rho(L-(1-\nu)(A-\epsilon(\mu)I)-\nu(B+\epsilon(\mu)I))$. Gli intervalli $]\mu-\delta(\mu),\mu+\delta(\mu)[$ formano un ricoprimento aperto dell'intervallo compatto $[0,1]$, che ha pertanto un sottoricoprimento finito:

$$[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} ]\mu_i-\delta(\mu_i),\mu_i+\delta(\mu_i)[.$$

Prendendo $\epsilon = \min\{\epsilon(\mu_i) : i = 1,...,n\}$, si ha quanto voluto.

Ponendo $S = B-A+2\epsilon I \in \mathcal{L}(H)$, otteniamo un operatore autoaggiunto e monotono, e $0 \in \rho(S)$. Per il teorema 5.7, possiamo considerare $S^{1/2}$ e $S^{-1/2}$. Poniamo

$$\tilde{L} = S^{-1/2}(L-A+\epsilon I)S^{-1/2}, \quad \tilde{N} = S^{-1/2}(N-A+\epsilon I)S^{-1/2}.$$

Si vede facilmente che $\mathcal{D}(\tilde{L}) = S^{1/2}(\mathcal{D}(L))$, $\tilde{L}$ è autoaggiunto e $\tilde{N}$ è tale che, per ogni $u \in H$, $\tilde{N}'(u) \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto. Operando il cambiamento di variabile $v = S^{1/2}u$, l'equazione (1) diventa equivalente alla seguente:

$$\tilde{L}v = \tilde{N}v. \tag{2}$$

Inoltre, l'equazione (2) è equivalente al seguente problema di punto fisso:

$$v = (\tilde{L}-\frac{1}{2}I)^{-1}[\tilde{N}v-\frac{1}{2}v] := Tv.$$

Siccome

$$L-(1-\mu)(A-\epsilon I)-\mu(B+\epsilon I) = S^{1/2}(\tilde{L}-\mu I)S^{1/2},$$

dalla (ii) si ha che

$$\sigma(\tilde{L}) \cap [0,1] = \emptyset,$$

da cui, per il teorema 5.6,

$$\|(\tilde{L}-\frac{1}{2}I)^{-1}\| < 2.$$

D'altra parte, da (i) si deduce che

$$0 \leq \tilde{N}'(v) \leq I \quad \text{per ogni } v \in H,$$

da cui, per il teorema 5.1,

$$\|\tilde{N}'(v)-\frac{1}{2}I\| \leq \frac{1}{2}.$$

Si ha quindi che $(\tilde{N}-\frac{1}{2}I)$ è Lipschitziana di costante $\frac{1}{2}$, $T$ è una contrazione, e pertanto ha un unico punto fisso, che può essere ottenuto come limite del processo iterativo $v_{n+1} = Tv_n$, con $v_0 \in H$ arbitrario. Ne segue la tesi. ∎

Dimostreremo ora un risultato di esistenza facendo uso del teorema di punto fisso di Schauder.

**Teorema 7.2.** *Supponiamo $L$ abbia risolvente compatto e che $N$ sia della forma*

$$Nu = \Gamma(u)u + Ru,$$

*dove $\Gamma(u) \in \mathcal{L}(H)$ è autoaggiunto, per ogni $u \in H$, e $R$ è una funzione la cui immagine è limitata. Siano $A, B \in \mathcal{L}(H)$ autoaggiunti, tali che*

$$\begin{array}{ll} (i) & A \leq \Gamma(u) \leq B \quad \text{per ogni } u \in H, \\ (ii) & \mathcal{N}(L - (1-\mu)A - \mu B) = \{0\} \quad \text{per ogni } \mu \in [0,1]. \end{array}$$

*Allora l'equazione (1) ha almeno una soluzione.*

Dimostrazione. Seguendo la dimostrazione del teorema 7.1, definiamo $\epsilon > 0$, $S$, $\tilde{L}$, $\tilde{N}$ e $T$. Definiamo inoltre

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(v) &= S^{-1/2}(\Gamma(S^{-1/2}v) - A + \epsilon I)S^{-1/2}, \\ \tilde{R} &= S^{-1/2}RS^{-1/2}. \end{aligned}$$

Si può vedere che $\tilde{\Gamma}(v)$ è autoaggiunto per ogni $v \in H$, $\tilde{R}$ è una funzione con immagine limitata, e

$$\tilde{N}v = \tilde{\Gamma}(v)v + \tilde{R}v.$$

Inoltre,

$$0 \leq \tilde{\Gamma}(v) \leq I \quad \text{per ogni } v \in H.$$

D'altra parte, siccome, per il teorema 4.1,

$$0 \in \rho(L - (1-\mu)A - \mu B) \quad \text{per ogni } \mu \in [0,1],$$

si ha che

$$\sigma(\tilde{L}) \cap [0,1] = \emptyset.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} \|Tv\| &\leq \|(\tilde{L} - \frac{1}{2}I)^{-1}\|[\|\tilde{\Gamma}(v) - \frac{1}{2}I\| \, \|v\| + \|\tilde{R}v\|] \\ &\leq c_1\|v\| + c_2, \end{aligned}$$

con $0 < c_1 < 1$ e $c_2 \geq 0$. Quindi $T$ manda una palla sufficientemente grande in sè, e siccome $T$ è completamente continuo, il teorema di Schauder ci assicura che $T$ ha un punto fisso. ∎

# 8 Sistemi Hamiltoniani

Vogliamo applicare i risultati ottenuti nel paragrafo precedente alla ricerca di soluzioni periodiche per un sistema Hamiltoniano. Sia $\mathcal{H} \in C^2(\mathbf{R}^{2N}, \mathbf{R})$ la funzione Hamiltoniana ($N \geq 1$),

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & I_{R^N} \\ -I_{R^N} & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice simplettica, $T > 0$ un periodo fissato e $h \in L^2(0, T; \mathbf{R}^{2N})$, un termine forzante dato. Consideriamo il sistema

$$(HS) \qquad \begin{cases} \mathcal{J}\dot{u}(t) = \nabla\mathcal{H}(u(t)) + h(t) \\ u(0) = u(T). \end{cases}$$

Lo spazio $H = L^2(0, T; \mathbf{R}^{2N})$ è uno spazio di Hilbert dotato del prodotto scalare

$$\langle u, v \rangle = \int_0^T (u(t), v(t))\, dt,$$

dove $(\cdot, \cdot)$ indica il prodotto scalare in $\mathbf{R}^{2N}$. Definiamo in $H$ un operatore $L$ ponendo

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(L) &= \{u \in H : u \text{ è assolutamente continuo, } \dot{u} \in H \text{ e } u(0) = u(T)\} \\ (Lu)(t) &= \mathcal{J}\dot{u}(t). \end{aligned}$$

Si vede facilmente che $\mathcal{N}(L)$ consiste di tutte e sole le funzioni costanti, e ha quindi dimensione $2N$, e $\mathcal{I}(L)$ è l'insieme delle funzioni $u \in H$ tali che $\int_0^T u(s)\, ds = 0$. Quindi, $\mathcal{I}(L)$ è chiuso e $\mathcal{I}(L) = \mathcal{N}(L)^\perp$.

**Lemma 8.1.** *$\mathcal{D}(L)$ è denso in $H$.*

Dimostrazione. Si vede immediatamente che $\mathcal{D}(L)$ contiene tutte le funzioni del tipo

$$\sin\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) d_j, \quad \cos\left(\frac{2\pi k t}{T}\right) d_j,$$

dove $\{d_j : j = 1, ..., 2N\}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^{2N}$, e quindi anche ogni loro combinazione lineare. Per il teorema di Fejér, queste formano un insieme denso in $C([0, T], \mathbf{R}^{2N})$, che a sua volta è denso in $L^2(0, T; \mathbf{R}^{2N})$. ■

**Lemma 8.2.** *$L$ è autoaggiunto.*

Dimostrazione. Per $u, v \in \mathcal{D}(L)$,

$$\langle Lu, v\rangle = \int_0^T (\mathcal{J}\dot{u}, v)\, dt = -\int_0^T (\dot{u}, \mathcal{J}v)\, dt = \int_0^T (u, \mathcal{J}\dot{v})\, dt = \langle u, Lv\rangle,$$

per cui $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{D}(L^*)$ e $(L^*v)(t) = \mathcal{J}\dot{v}(t)$. Sia ora $v \in \mathcal{D}(L^*)$. Ponendo $\Phi(t) = \int_0^t (L^*v)(s)\, ds$, per ogni $u \in \mathcal{D}(L)$ si ha

$$\int_0^T (\mathcal{J}\dot{u}, v)\, dt = \int_0^T (u(t), (L^*v)(t))\, dt = u(T)\Phi(T) - \int_0^T (\dot{u}, \Phi)\, dt.$$

Prendendo per $u$ una costante non nulla, si ha che

$$\Phi(T) = 0,$$

e quindi

$$\int_0^T (\mathcal{J}\dot{u}, v + J\Phi)\, dt = 0.$$

Quindi, $v + \mathcal{J}\Phi \in [\mathcal{I}(L)]^\perp = \mathcal{N}(L)$. Ne segue che $v + \mathcal{J}\Phi$ è costante, per cui $v$ è assolutamente continua, $\dot{v} \in H$ e $v(0) = v(T)$. In altre parole, $v \in \mathcal{D}(L)$. Ciò dimostra che $\mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L^*)$, e perciò $L$ è autoaggiunto. ■

**Lemma 8.3.** *$L$ ha risolvente compatto.*

Dimostrazione. Dimostreremo che l'operatore $\hat{L}$, restrizione di $L$ a $\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{I}(L)$, ha un inverso $\hat{L}^{-1}$ compatto. La conclusione seguirà allora dal teorema 5.8. Consideriamo una successione $(v_n)$ limitata in $\mathcal{I}(L)$. Sia $(u_n)$ in $\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{I}(L)$ tale che

$$\hat{L}u_n = v_n,$$

ossia

$$\begin{cases} \mathcal{J}\dot{u}_n(t) = v_n(t) \\ u(0) = u(T). \end{cases}$$

Allora $(\dot{u}_n)$ è limitata. Siccome $u_n$ ha media nulla, esiste un $t_n \in [0, T]$ tale che $u_n(t_n) = 0$, per cui

$$|u_n(t)| = \left| u_n(t_n) + \int_{t_n}^t \dot{u}_n(s)\, ds \right| \le \int_0^T |\dot{u}_n(s)|\, ds \le \sqrt{T}\|\dot{u}_n\|,$$

per ogni $t \in [0, T]$. Ne segue che $(u_n)$ è limitata insieme con la sua derivata, e per mezzo del teorema di Ascoli-Arzelà si può dimostrare che esiste una sottosuccessione convergente. ■

**Lemma 8.4.** *Lo spettro di $L$ è costituito solamente di autovalori, tutti di molteplicità $2N$ :*

$$\sigma(L) = \left\{ \frac{2\pi k}{T} : k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

<u>Dimostrazione</u>. Consideriamo l'equazione $Lu = \lambda u$, ossia

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -\lambda \mathcal{J} u(t) \\ u(0) = u(T). \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è data da

$$u(t) = \exp(-\lambda \mathcal{J} t) d,$$

con $d \in \mathbf{R}^{2N}$ arbitrario. Tenendo conto che $J^2 = -I$, abbiamo

$$\begin{aligned} \exp(-\lambda \mathcal{J} t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda t)^{2k}}{(2k)!} I - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\lambda t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \mathcal{J} \\ &= \cos(\lambda t) I - \sin(\lambda t) \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Quindi

$$u(t) = \cos(\lambda t) d - \sin(\lambda t) \mathcal{J} d,$$

e si avrà che $u(0) = u(T)$ se e solo se

$$(1 - \cos(\lambda T)) d - \sin(\lambda T) \mathcal{J} d = 0.$$

Moltiplicando scalarmente prima per $d$ e poi per $\mathcal{J} d$ si vede che ciò è possibile se e solo se $\lambda = \frac{2\pi k}{T}$, con $k \in \mathbf{Z}$ qualsiasi. Essendo $d \in \mathbf{R}^{2N}$ arbitrario, ogni autovalore ha molteplicità $2N$. ■

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente risultato di esistenza e unicità per il sistema (HS).

**Teorema 8.5.** *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due matrici reali $2N \times 2N$ simmetriche tali che*

$(j)$ $\quad \mathcal{A} \leq \mathcal{H}''(u) \leq \mathcal{B}$ *per ogni* $u \in \mathbf{R}^{2N}$,

$(jj)$ $\quad \sigma((1-\mu)\mathcal{J}\mathcal{A} + \mu \mathcal{J}\mathcal{B}) \cap \frac{2\pi}{T} i\mathbf{Z} = \emptyset$ *per ogni* $\mu \in [0, 1]$.

*Allora (HS) ha una e una sola soluzione, che può essere ottenuta come limite del procedimento iterativo definito da*

$$\begin{cases} \mathcal{J}\dot{u}_{k+1}(t) - \frac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{B})u_{k+1}(t) = \nabla\mathcal{H}(u_k(t)) - \frac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{B})u_k(t) + h(t) \\ u(0) = u(T), \end{cases}$$

*con $u_0 \in L^2(0,T;\mathbf{R}^{2N})$ arbitrario.*

Dimostrazione. Per applicare il teorema 7.1, definiamo $A, B \in \mathcal{L}(H)$ :

$$(Au)(t) = \mathcal{A}u(t), \quad (Bu)(t) = \mathcal{B}u(t).$$

Si ha che $A$ e $B$ sono autoaggunti, e (i) segue direttamente dall'ipotesi (j). Introduciamo ora la funzione $N$ definita da

$$(Nu)(t) = \nabla\mathcal{H}(u(t)) + h(t).$$

Per (j), $N : H \to H$. Inoltre, $N$ è differenziabile secondo Gateaux,

$$(N'(u)v)(t) = \mathcal{H}''(u(t))v(t),$$

e quindi $N'(u)$ è autoaggiunto, per ogni $u \in H$. Per verificare (ii), siccome $L$ ha risolvente compatto, basta vedere, per il teorema 4.1, che per ogni $\mu \in [0,1]$, l'unica soluzione di

$$\begin{cases} \mathcal{J}\dot{u}(t) - (1-\mu)\mathcal{A}u(t) - \mu\mathcal{B}u(t) = 0 \\ u(0) = u(T) \end{cases}$$

è $u = 0$. Quanto sopra si può riscrivere nella forma

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = -(1-\mu)\mathcal{J}\mathcal{A}u(t) - \mu\mathcal{J}\mathcal{B}u(t) = 0 \\ u(0) = u(T). \end{cases}$$

Le soluzioni sono tutte della forma $u(t) = X_j(t)e^{\lambda_j t}$, dove $\lambda_j$ è un autovalore di $-(1-\mu)\mathcal{J}\mathcal{A} - \mu\mathcal{J}\mathcal{B}$ e $X_j(t)$ è una funzione vettoriale di tipo polinomiale. Per l'ipotesi (jj), c'è solo la soluzione nulla. Il teorema 7.1 ci assicura allora dell'esistenza di un'unica soluzione di (HS), e ci fornisce anche l'iterazione voluta. ■

Consideriamo ora il problema

$$(HS') \qquad \begin{cases} \mathcal{J}\dot{u}(t) = \mathcal{Q}(t, u(t))u(t) + \mathcal{R}(t, u(t)) \\ u(0) = u(T). \end{cases}$$

dove $\mathcal{Q}(t, u)$ è una matrice $2N \times 2N$ simmetrica dipendente in modo continuo da $(t, u)$, e $\mathcal{R}(t, u)$ è una funzione continua e limitata. Si vede facilmente che, sotto l'ipotesi (j), anche il problema (HS) può essere scritto in questa forma. Applicando il teorema 7.2, si dimostra analogamente il seguente risultato di esistenza.

**Teorema 8.6.** *Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due matrici reali $2N \times 2N$ simmetriche tali che*

$$(j) \quad \mathcal{A} \leq \mathcal{Q}(t, u) \leq \mathcal{B} \quad \textit{per ogni } t \in [0, T] \textit{ e } u \in \mathbf{R}^{2N},$$

$$(jj) \quad \sigma((1-\mu)\mathcal{J}\mathcal{A} + \mu\mathcal{J}\mathcal{B}) \cap \frac{2\pi}{T} i\mathbf{Z} = \emptyset \quad \textit{per ogni } \mu \in [0, 1].$$

*Allora (HS') ha almeno una soluzione.*

# 9 Equazioni differenziali del secondo ordine

Consideriamo un importante caso particolare di sistema Hamiltoniano. Sia $u = (p, q) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ e supponiamo che la funzione Hamiltoniana sia della forma

$$\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{2}|p|^2 + \mathcal{F}(q),$$

con $\mathcal{F} \in C^2(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$. Se $h = (0, h_1)$, il sistema (HS) del paragrafo precedente diventa

$$(P) \qquad \begin{cases} -\ddot{q}(t) = \nabla\mathcal{F}(q(t)) + h_1(t) \\ q(0) = q(T), \ \ \dot{q}(0) = \dot{q}(T). \end{cases}$$

Siano date due matrici $N \times N$ simmetriche $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{B}_1$ tali che $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{B}_1$. Ordiniamo gli autovalori di entrambe in ordine crescente $\{\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq ... \leq \alpha_N\}$ e $\{\beta_1 \leq \beta_2 \leq ... \leq \beta_N\}$, rispettivamente. Per il teorema di Fisher-Courant,

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \min_{E_n} \max_{u \in E_n, \|u\|=1} (\mathcal{A}u, u) \\ &\leq \min_{E_n} \max_{u \in E_n, \|u\|=1} (\mathcal{B}u, u) = \beta_m, \end{aligned}$$

dove gli $E_n$ variano nell'insieme di tutti i sottospazi $n$-dimensionali di $\mathbf{R}^N$.

Possiamo allora dimostrare il seguente risultato di esistenza e unicità.

**Teorema 9.1.** *Siano $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{B}_1$ due matrici $N \times N$ simmetriche tali che*

$$
\begin{array}{ll}
(k) & \mathcal{A}_1 \leq \mathcal{F}''(q) \leq \mathcal{B}_1 \text{ per ogni } q \in \mathbf{R}^N, \\
(kk) & \bigcup_{m=1}^{N} [\alpha_m, \beta_m] \cap \{(2\pi k/T)^2 : k \in \mathbf{N}\} = \emptyset.
\end{array}
$$

*Allora (P) ha una e una sola soluzione, che può essere ottenuta come limite del processo iterativo definito da*

$$
\begin{cases}
-\ddot{q}_{k+1}(t) - \frac{1}{2}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1)q_{k+1}(t) = \nabla\mathcal{F}(q_k(t)) - \frac{1}{2}(\mathcal{A}_1 + \mathcal{B}_1)q_k(t) + h_1(t) \\
q(0) = q(T), \quad \dot{q}(0) = \dot{q}(T),
\end{cases}
$$

*con $q_0 \in L^2(0, T; \mathbf{R}^N)$ arbitrario.*

Dimostrazione. Definiamo le matrici $2N \times 2N$ $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ in questo modo:

$$
\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_1 \end{pmatrix},
$$

$$
\mathcal{B} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{B}_1 \end{pmatrix}.
$$

Si vede allora che, per $\mathcal{H}(p, q) = \frac{1}{2}|p|^2 + \mathcal{F}(q)$, la condizione (j) del teorema 7.1 è verificata. Per quanto riguarda la condizione (jj), abbiamo che

$$
(1 - \mu)\mathcal{J}\mathcal{A} + \mu\mathcal{J}\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & (1 - \mu)\mathcal{A}_1 + \mu\mathcal{B}_1 \\ -I & 0 \end{pmatrix},
$$

per cui

$$
(1 - \mu)\mathcal{J}\mathcal{A}u + \mu\mathcal{J}\mathcal{B}u = \lambda u \Leftrightarrow \begin{cases} ((1 - \mu)\mathcal{A}_1 + \mu\mathcal{B}_1)q = \lambda p \\ -p = \lambda q. \end{cases}
$$

Quindi, la condizione (jj) del teorema 7.1 è verificata se

$$
-\lambda^2 \notin [\alpha_m, \beta_m]
$$

per ogni $\lambda \in \frac{2\pi}{T} i\mathbf{Z}$ e $m = 1, 2, ..., N$, che è proprio quanto affermato nell' ipotesi (kk). La dimostrazione si completa applicando il teorema 7.1. ■

Possiamo ora considerare il problema più generale

$$(P') \qquad \begin{cases} -\ddot{q}(t) = \mathcal{Q}_1(t, q(t))q(t) + \mathcal{R}_1(t, q(t)) \\ q(0) = q(T), \;\; \dot{q}(0) = \dot{q}(T), \end{cases}$$

dove $\mathcal{Q}_1(t, q)$ è una matrice $N \times N$ simmetrica dipendente in modo continuo da $(t, q)$ e $\mathcal{R}_1(t, q)$ è una funzione continua e limitata. Come corollario del teorema 8.6 abbiamo il seguente risultato di esistenza.

**Teorema 9.2.** *Siano $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{B}_1$ due matrici $N \times N$ simmetriche tali che*

$$(k) \quad \mathcal{A}_1 \le \mathcal{Q}_1(t, q) \le \mathcal{B}_1 \text{ per ogni } t \in [0, T] \text{ e } q \in \mathbf{R}^N,$$

$$(kk) \quad \bigcup_{m=1}^{N} [\alpha_m, \beta_m] \cap \{(2\pi k/T)^2 : k \in \mathbf{N}\} = \emptyset.$$

*Allora (P) ha almeno una soluzione.*

Consideriamo infine il caso scalare

$$(S) \qquad \begin{cases} -\ddot{q}(t) = g(t, q(t)) \\ q(0) = q(T), \;\; \dot{q}(0) = \dot{q}(T), \end{cases}$$

dove $g : [0, T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è una funzione continua.

**Teorema 9.3.** *Supponiamo che, per un certo $\epsilon > 0$ e un $n \in \mathbf{N}$ si abbia*

$$\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \epsilon \le \liminf_{|x| \to \infty} \frac{g(t, x)}{x} \le \limsup_{|x| \to \infty} \frac{g(t, x)}{x} \le \left(\frac{2\pi(n+1)}{T}\right)^2 - \epsilon,$$

*uniformemente rispetto a $t \in [0, T]$. Allora il problema (S) ha almeno una soluzione. Se in più $g(t, x)$ è derivabile rispetto a $x$ e*

$$\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \epsilon \le \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) \le \left(\frac{2\pi(n+1)}{T}\right)^2 - \epsilon,$$

*allora la soluzione è unica.*

<u>Dimostrazione</u>. Definiamo, se $x \neq 0$,

$$\gamma(t, x) = \begin{cases} \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \frac{\epsilon}{2} & \text{se } \frac{g(t,x)}{x} < \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \frac{\epsilon}{2}, \\ \frac{g(t,x)}{x} & \text{se } \left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2 + \frac{\epsilon}{2} \le \frac{g(t,x)}{x} \le \left(\frac{2\pi(n+1)}{T}\right)^2 - \frac{\epsilon}{2}, \\ \left(\frac{2\pi(n+1)}{T}\right)^2 - \frac{\epsilon}{2} & \text{se } \left(\frac{2\pi(n+1)}{T}\right)^2 - \frac{\epsilon}{2} < \frac{g(t,x)}{x}. \end{cases}$$

Poniamo $\gamma(t,0)=0$. Allora si ha

$$g(t,x)=\gamma(t,x)x+r(t,x),$$

dove $r(t,x)$ è una funzione continua e limitata e

$$\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2+\frac{\epsilon}{2}\le\gamma(t,x)\le\left(\frac{2\pi(n+1)}{T}\right)^2-\frac{\epsilon}{2},$$

per ogni $t\in[0,T]$ e $x\in\mathbf{R}$. Per il teorema 9.2, il problema (S) ha almeno una soluzione. La seconda parte della tesi segue direttamente dal teorema 9.1. ∎

# 10 Il caso non autoaggiunto

In questo paragrafo considereremo lo spazio di Hilbert $H=L^2(\Omega,\mathbf{R})$, con $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, un dominio limitato. Se $L$ è autoaggiunto, come facile conseguenza del teorema 7.1 si ha che, se una funzione $p\in\mathcal{C}(\bar{\Omega},\mathbf{R})$ è tale che

$$p(x)\notin\sigma(L)\quad\text{per ogni } x\in\bar{\Omega},$$

l'equazione

$$(Lu)(x)=p(x)u(x)$$

ha solo la soluzione nulla. Vedremo ora che questa proprietà non vale in generale se $L$ non è autoaggiunto, anche se la funzione $p$ ha norma del sup $\|p\|_\infty$ piccola a piacere.

Supporremo che $L$ sia un operatore in $H$ avente risolvente compatto e nucleo di dimensione 1. Siano

$$\mathcal{N}(L)=\mathbf{R}\phi,\quad \mathcal{N}(L^*)=\mathbf{R}\psi,$$

dove $\phi$ e $\psi$ sono funzioni continue che si possono estendere a funzioni in $\mathcal{C}(\bar{\Omega},\mathbf{R})$, e $\|\phi\|=\|\psi\|=1$.

**Teorema 10.1.** *Supponiamo inoltre*

$$\{x\in\Omega:\phi(x)\psi(x)>0\}\neq\emptyset\quad e\quad\{x\in\Omega:\phi(x)\psi(x)<0\}\neq\emptyset.$$

*Allora per ogni $\rho > 0$ esiste una funzione $p \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$ tale che*

$$0 < p(x) < \rho \quad \textit{per ogni } x \in \bar{\Omega}$$

*e l'equazione*

$$(Lu)(x) = p(x)u(x)$$

*ha una soluzione non nulla.*

Dimostrazione. Non è difficile costruire due funzioni $p_1, p_2 \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}, \mathbf{R})$ tali che

$$\int_\Omega p_1(x)\phi(x)\psi(x)\,dx < 0 < \int_\Omega p_2(x)\phi(x)\psi(x)\,dx.$$

Dimostreremo ora che esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $s \in ]0, \delta[$, esiste un $\lambda \in [0, 1]$ per cui l'equazione

$$(Lu)(x) = s[\lambda p_1(x) + (1-\lambda)p_2(x)]u(x)$$

ha una soluzione non nulla.

Per assurdo, sia $(s_n)$ una successione infinitesima tale che, per ogni $\lambda \in [0, 1]$,

$$Lu = s_n[\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2]u \quad \Rightarrow \quad u = 0.$$

L'operatore $L - s_n[\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2]$ ha, per $n$ sufficientemente grande, risolvente compatto. Infatti, preso $\mu \in \rho(L)$, si ha che $0 \in \rho(L - \mu I)$, e per $n$ grande, $0 \in \rho(L - \mu I - s_n[\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2])$ (corollario 2.10). Quindi $\mu \in \rho(L - s_n[\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2])$, e per il teorema 4.1, $(L - \mu I - s_n[\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2])^{-1}$ è compatto.

Allora l'equazione

$$Lu - s_n[\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2]u = s_n\psi$$

ha soluzione $u_{\lambda,n}$. Moltiplicando per $\psi$ e integrando, si ottiene

$$-\int_\Omega [\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2]u_{\lambda,n}\psi = 1,$$

per cui

$$1 \leq \|\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2\|_\infty \|u_{\lambda,n}\| \leq (\|p_1\|_\infty + \|p_2\|_\infty)\|u_{\lambda,n}\|.$$

Quindi,

$$\|u_{\lambda,n}\| \geq \frac{1}{\|p_1\|_\infty + \|p_2\|_\infty}.$$

Sia $v_{\lambda,n} = \frac{u_{\lambda,n}}{\|u_{\lambda,n}\|}$. Allora

$$Lv_{\lambda,n} - s_n[\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2]v_{\lambda,n} = \frac{s_n \psi}{\|u_{\lambda,n}\|},$$

da cui

$$\|Lv_{\lambda,n}\| \leq s_n \left[ \|p_1\|_\infty + \|p_2\|_\infty + \frac{1}{\|p_1\|_\infty + \|p_2\|_\infty} \right].$$

Ne segue che

$$\lim_n \|Lv_{\lambda,n}\| = 0,$$

uniformemente in $\lambda \in [0,1]$. Considero ora $\hat{L} = L|_{\mathcal{D}(L)\cap\mathcal{N}(L)^\perp}$. Ragionando come nella prima parte della dimostrazione del teorema 5.8, si può vedere che $\hat{L}^{-1}$ è compatto. In particolare, $\hat{L}^{-1}$ è continuo, e siccome $\hat{L}^{-1}L = I - P$, possiamo concludere che

$$\lim_n \|(I-P)v_{\lambda,n}\| = 0,$$

uniformemente in $\lambda \in [0,1]$.

Scriviamo $v_{\lambda,n} = r_{\lambda,n}\phi + (I-P)v_{\lambda,n}$. Essendo $(r_{\lambda,n})_n$ limitata, essa ha una sottosuccessione convergente. Essendo $\|v_{\lambda,n}\| = 1$, si ha che $v_{\lambda,n} \to \phi$ o $v_{\lambda,n} \to -\phi$. Allora, per come sono state costruite $p_1$ e $p_2$, si deve avere

$$v_{0,n} \to -\phi \quad \text{e} \quad v_{1,n} \to \phi,$$

ossia

$$r_{0,n} \to -1 \quad \text{e} \quad r_{1,n} \to 1.$$

Prendiamo un $\bar{n}$ sufficientemente grande per cui

$$\|(I-P)v_{\lambda,\bar{n}}\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{per ogni } \lambda \in [0,1],$$

$$r_{0,\bar{n}} \leq -\frac{1}{2}\,, \quad r_{1,\bar{n}} \geq \frac{1}{2}.$$

Dimostriamo che $r_{\lambda,\bar{n}}$ dipende in modo continuo da $\lambda$. Siccome

$$
\begin{aligned}
&(L-\lambda_1 A)^{-1}-(L-\lambda_2 A)^{-1}= \\
&=(L-\lambda_1 A)^{-1}(L-\lambda_2 A)(L-\lambda_2 A)^{-1}-(L-\lambda_1 A)^{-1}(L-\lambda_1 A)(L-\lambda_2 A)^{-1} \\
&=(\lambda_1-\lambda_2)(L-\lambda_1 A)^{-1}A(L-\lambda_2 A)^{-1},
\end{aligned}
$$

si ha che

$$\|u_{\lambda_1,\bar{n}}-u_{\lambda_2,\bar{n}}\| \le C|\lambda_1-\lambda_2|,$$

dove $C>0$ è una costante che dipende solo da $\lambda_1$. Ne segue che $u_{\lambda,\bar{n}}$ dipende in modo continuo da $\lambda$, e pertanto anche $r_{\lambda,\bar{n}}$.

Posso allora concludere che esiste un $\bar{\lambda}\in ]0,1[$ tale che $r_{\bar{\lambda},\bar{n}}=0$. Allora

$$1=\|v_{\bar{\lambda},\bar{n}}\|=\|(I-P)v_{\bar{\lambda},\bar{n}}\|\le\frac{1}{2}\,,$$

una contraddizione. ■

La conclusione del teorema 10.1 ci dice che $\mathcal{N}(L-p)\neq\{0\}$ e pertanto, per il Teorema 2.7, anche $\mathcal{N}(L^*-p)\neq\{0\}$. Come è noto, l'equazione

$$Lu=pu+h \tag{3}$$

ha soluzione se e solo se

$$h\in\mathcal{I}(L-p)=\mathcal{N}(L^*-p)^{\perp}.$$

Abbiamo quindi un risultato di non esistenza di soluzioni per l'equazione (3) se il termine forzante $h$ non è ortogonale a $\mathcal{N}(L^*-p)$.

Questo risultato si applica a problemi del tipo

$$
\begin{cases}
q^{(n)}(t)=p(t)q(t)+h(t) \\
q(0)=0,\;\; q^{(i)}(T)=0\;\;(i=0,...,n-2).
\end{cases}
$$

Si può infatti dimostrare che l'operatore differenziale ha tutte le proprietà richieste. Il suo spettro consiste addirittura solo di autovalori reali. Nonostante ciò, anche se la funzione $p$ sta tra due autovalori, il problema può non avere alcuna soluzione, contrariamente a quanto avviene nel caso autoaggiunto.

# 11 Bibliografia

La prima parte di queste note raccoglie alcuni risultati classici della teoria degli operatori lineari. Per ulteriori approfondimenti, si possono consultare, tra numerosi altri, i seguenti libri:

H. Brezis, Analise Fonctionnelle, Masson, Paris, 1983 (traduzione italiana ed. Liguori).

G. Helmberg, Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space, North-Holland, Amsterdam, 1969.

F. Riesz e B. S. Nagy, Lecons d'analyse fonctionnelle, Akademiai Kiado, Budapest, 1952.

Il teorema 7.1 è un corollario del risultato principale contenuto nell'articolo

A. Fonda e J. Mawhin, Iterative and variational methods for the solvability of some semilinear equations in Hilbert spaces, J. Differential Equations 98 (1992), 355-375.

Si può ivi trovare anche un approccio variazionale allo stesso problema e una bibliografia più completa. La condizione (kk) del teorema 9.1 è stata introdotta da A. C. Lazer nel 1972. Tale condizione può essere generalizzata per trattare diversi tipi di problemi semilineari. Per applicazioni al problema ellittico, l'equazione delle onde, l'equazione di Schrödinger e altri, vedi

A. Fonda e J. Mawhin, An iterative method for the solvability of semilinear equations in Hilbert spaces and applications, in: Partial Differential Equations, ed. J. Wiener e J. Hale, Longman 1992, 126-132.

Il teorema 10.1 è stato dimostrato in

C. Fabry, A. Fonda e F. Munjamarere, Semilinear equations at resonance with non-symmetric linear part, J. Math. Anal. Appl. 180 (1993), 189-206.

Esso generalizza un analogo risultato ottenuto per problemi al bordo non autoaggiunti in

M. Gaudenzi e F. Zanolin, On the solvability of n-th order boundary value problems between two eigenvalues, J. Diff. Int. Eq. 5 (1992), 591-613.