УДК 517.912

ДУБРОВИН Б. А., НАТАНЗОН С. М.

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ТЭТА-ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КАДОМЦЕВА — ПЕТВИАШВИЛИ

Введение

Проблема вещественности метода «конечнозонного интегрирования», поставленная С. П. Новиковым (см. введение к [3]), в настоящее время, в основном, решена для $1+1$-систем (одна пространственная переменная) теории солитонов (библиографию см в [4]). Первым примером системы с двумя пространственными переменными, для которой также удалось полностью решить эту проблему, является уравнение Кадомцева — Петвиашвили. Это решение и изложено в данной работе.

Уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП) является, как известно [7], обобщением уравнения Кортевега – де Фриза (КдФ) на двумерный случай и имеет в теории нелинейных волн ту же степень универсальности, что и уравнение КдФ. Два варианта этого уравнения (точнее говоря, системы уравнений) имеют следующий вид:

а) *устойчивый вариант* (называемый также уравнением КП 2)

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}u_y &= w_x, \\ w_y &= u_t - \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}), \end{aligned} \tag{0.1}$$

б) *неустойчивый вариант* (уравнение КП 1)

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}u_y &= w_x, \\ w_y &= u_t - \frac{1}{4}(6uu_x - u_{xxx}) \end{aligned} \tag{0.2}$$

(этот вариант формально получается из (0.1) заменой $x\mapsto ix$, $y\mapsto iy$, $t\mapsto it$).

Уравнение КП было первым физически важным примером $(2+1)$-системы, допускающей применение метода обратной задачи [8, 1]. Коммутационное представление для уравнений (0.1), (0.2) имеет вид:

для КП 2

$$[-\partial_y+L, -\partial_t+A]=0, \tag{0.3}$$

$$L=\partial_x^2+u, \tag{0.4}$$

$$A=\partial_x^3+\frac{3}{4}(u\partial_x+\partial_x u)+w; \tag{0.5}$$

Для КП 1 коммутационное представление получается из (0.3) — (0.5) заменой $(x, y, t)\mapsto(ix, iy, it)$.

Широкий класс точных быстроубывающих решений уравнения КП был построен В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [8]. Лишь в самое последнее время были разработаны методы, позволяющие получить полное описание всех быстроубывающих решений этого уравнения (см. [12, 13, 19]).

Метод построения точных периодических и квазипериодических решений уравнений КП был создан И. М. Кричевером в работе [9]. Эти решения строятся по следующей схеме.

Пусть Γ — компактная риманова поверхность рода g, P_∞ — точка на Γ, k^{-1} — локальный параметр на Γ, определенный в окрестности точки P_∞, причем $k^{-1}(P_\infty)=0$. Тройка (Γ, P_∞, k) определяет семейство точных решений уравнения КП, параметризованных дивизорами D степени g на поверхности $\Gamma\setminus P_\infty$. Именно, пусть $\psi=\psi(x, y, t; P)$ — функция Бейкера — Ахиезера на поверхности Γ, мероморфная на $\Gamma\setminus P_\infty$ с полюсами в точках дивизора D, имеющая в точке P_∞ экспоненциальную асимптотику вида

$$\psi=e^{kx+k^2y+k^3t}\left(1+\frac{\xi_1}{k}+\frac{\xi_2}{k^2}+\dots\right),\quad \xi_i=\xi_i(x, y, t),\quad i=1, 2, \dots \tag{0.6}$$

Тогда ψ является собственной функцией для некоторых линейных дифференциальных операторов, т. е.

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=L\psi, \tag{0.7}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=A\psi, \tag{0.8}$$

где операторы L, A имеют вид (0.4), (0.5) соответственно, а их коэффициенты u, w выражаются через коэффициенты ξ_i разложения (0.6) по формулам

$$u=-2\frac{\partial\xi_1}{\partial x},\quad w=3\xi_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2}-3\frac{\partial\xi_2}{\partial x}. \tag{0.9}$$

Поскольку условие совместности уравнений (0.7), (0.8) имеет вид (0.3), коэффициенты u и w удовлетворяют уравнению КП (0.1).

Отметим, что замена локального параметра

$$k\mapsto\lambda k+a+\frac{b}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{0.10}$$

(λ, a, b — произвольные комплексные числа, $\lambda\neq 0$) приводит к другому семейству решений того же уравнения КП. Эти другие решения получаются при помощи преобразований

$$\begin{gathered} x\mapsto\lambda x+2\lambda ay+(3\lambda a^2+3\lambda^2 b)t,\\ y\mapsto\lambda^2 y+3\lambda^2 at,\\ t\mapsto\lambda^3 t,\\ u\mapsto\lambda^{-2}u-2\lambda^{-1}b. \end{gathered} \tag{0.11}$$

Отсюда вытекает, что зависимость решения (0.9) уравнения КП от локального параметра сводится к зависимости только от его ростка третьего порядка.

Построенные решения выражаются через тэта-функцию римановой поверхности Γ после фиксации произвольного канонического базиса циклов $a_1, \dots, a_g$, $b_1, \dots, b_g$:

$$u(x, y, t)=2\partial_x^2\ln\theta(xU+yV+tW+z_0)+c, \tag{0.12}$$

$$w(x, y, t)=\frac{3}{2}\partial_x\partial_y\ln\theta(xU+yV+tW+z_0)+c_1. \tag{0.13}$$

Здесь θ — тэта-функция Римана поверхности Γ, т. е.

$$\theta(x)=\sum_{N_1,\dots,N_g\in\mathbf{Z}}\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{g}B_{ij}N_iN_j+\sum_{i=1}^{g}N_iz_i\right], \tag{0.14}$$

$B=(B_{ij})$ — матрица периодов голоморфных дифференциалов $\omega_1, \ldots, \omega_g$ на поверхности Γ:

$$\oint_{a_j} \omega_k = 2\pi i \delta_{kj}, \quad \oint_{b_j} \omega_k = B_{kj}, \quad k, j = 1, \ldots, g. \tag{0.15}$$

Далее, определим векторы $U=(U_1, \ldots, U_g)$, $V=(V_1, \ldots, V_g)$, $W=(W_1, \ldots, W_g)$. Пусть $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ — дифференциалы второго рода на Γ с нулевыми a-периодами, голоморфные вне точки P_∞ с главными частями в этой точке вида

$$\Omega_1 = dk + \ldots, \quad \Omega_2 = d(k^2) + \ldots, \quad \Omega_3 = d(k^3) + \ldots \tag{0.16}$$

(многоточием обозначены правильные члены). Тогда

$$U_j = \oint_{b_j} \Omega_1, \quad V_j = \oint_{b_j} \Omega_2, \quad W_j = \oint_{b_j} \Omega_3, \quad j = 1, \ldots, g. \tag{0.17}$$

Наконец, вектор z_0 определяется по дивизору D; он принимает произвольные значения, когда D пробегает все возможные дивизоры степени g. Вид констант c, c_1 для нас несуществен, и мы его приводить не будем.

Решения (0.12), (0.13) являются, вообще говоря, квазипериодическими комплексными мероморфными функциями. Проблеме выделения среди них гладких вещественных решений и посвящена настоящая работа. Сформулируем ее основной результат.

ТЕОРЕМА. *Для гладкости и вещественности решений* (0.12), (0.13) *уравнений* КП 1 (*для которого в указанных формулах нужно заменить* $(x, y, t) \mapsto (ix, iy, it)$) *и* КП 2 *необходимо и достаточно, чтобы для тройки* (Γ, P_∞, k) *и вектора* z_0 *выполнялись следующие условия*:

1°. *Риманова поверхность* Γ *допускает антиголоморфную инволюцию* $\sigma: \Gamma \to \Gamma$, $\sigma^2 = 1$, *причем* $\sigma(P_\infty) = P_\infty$, $\sigma^*(k) = \bar{k}$.

2°. *Совокупность всех неподвижных овалов инволюции* σ *разбивает поверхность* Γ *на два куска* Γ^+ *и* Γ^- (*так называемая инволюция разделяющего типа*).

3°. *Пусть* $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k+1}$ — *неподвижные овалы инволюции* σ, $k \geqslant 0$, *причем* $P_\infty \in \Gamma_{k+1}$. *Положим* $\rho = (g-k)/2$ (*натуральное число*). *Построим на* Γ *базис циклов* (*см.* [3])

$$a_1, b_1, \ldots, a_\rho, b_\rho; \quad a_{\rho+1}, b_{\rho+1}, \ldots, a_{\rho+k}, b_{\rho+k}; \quad a_1', b_1', \ldots, a_\rho', b_\rho' \tag{0.18}$$

такой, что $a_{\rho+j} = \Gamma_j$, $j = 1, \ldots, k$,

$$a_i, b_i \in \Gamma^+, \quad \sigma(a_i) = a_i', \quad \sigma(b_i) = -b_i', \quad i = 1, \ldots, \rho, \tag{0.19}$$
$$\sigma(a_{\rho+j}) = a_{\rho+j}, \quad \sigma(b_{\rho+j}) = -b_{\rho+j}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Тогда вектор z_0 *для уравнения* КП 1 — *произвольный вектор вида*

$$z_0 = (\xi; \eta; \bar{\xi}), \quad \xi \in \mathbf{C}^\rho, \quad \eta \in \mathbf{R}^k. \tag{0.20}$$

4°. *Для уравнения* КП 2 *имеется дополнительное топологическое ограничение на поверхность* Γ: *инволюция* σ *должна иметь на* Γ *максимальное число овалов* (*равное* $g+1$). *Если выбрать базис циклов вида* (0.19) ($k=g$, $\rho=0$), *то* z_0 — *произвольный вектор с чисто мнимыми координатами.*

Достаточность условий теоремы была доказана одним из авторов в работах [3, 15]. В настоящей работе мы докажем необходимость этих условий[1] при дополнительном предположении на решения $u(x, y, t)$, $w(x, y, t)$ вида (0.12), (0.13). Мы предположим не только гладкость этих решений, но и всех решений того же вида, построенных по той же тройке (Γ, P_∞, k) и получающихся из u, w вариацией вектора z_0 в формулах (0.12), (0.13), сохраняющей вещественность функций u, w. Если все периоды квазипериодических функций u, w независимы, то это предположение не является ограничительным; напротив, в периодическом по x случае для уравнения КП 1 от этого предположения можно отказаться (см. подробнее конец § 3).

Наибольшую трудность в нашем доказательстве составляет доказательство «вещественности» римановой поверхности (т. е. наличия на ней антиголоморфной инволюции). Другими словами, мы доказываем, что из вещественности абелевых функций $\partial_x^2 \ln \theta(Ux+Vy+z_0)$, $\partial_x \partial_y \ln \theta(Ux+Vy+z_0)$ (при вещественных x, y и некотором z_0) вытекает вещественность римановой поверхности.

Отметим, что приведенное в работе доказательство проходит и для тех решений уравнения КП, которые строятся согласно схеме И. М. Кричевера по особым алгебраическим кривым (это солитонные, рациональные решения, их «суперпозиции» друг с другом и с квазипериодическими решениями).

§ 1. Доказательство вещественности римановой поверхности

Доказательство необходимости условий теоремы мы начнем с п. 1° теоремы, т. е. с доказательства «вещественности» римановой поверхности Γ относительно некоторой антиголоморфной инволюции σ. Для этого мы используем то, что тэта-функции произвольных римановых поверхностей, кроме уравнения КП, удовлетворяют, согласно [9], еще и бесконечной серии дифференциальных соотношений — так называемой *иерархии* КП. Все эти уравнения допускают коммутационное представление нулевой кривизны вида

$$[\partial_{x_i} - L_i, \partial_{x_j} - L_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots, \tag{1.1}$$

где операторы L_i имеют вид

$$L_i = \partial_x^i + \sum_{k=0}^{i-2} u_{ik} \partial_x^k, \quad x = x_1. \tag{1.2}$$

При $i=1$, $L_1=\partial_x$; при $i=2$, $j=3$ получаем первое нетривиальное уравнение иерархии — само уравнение КП, где $x_2=y$, $x_3=t$, $L_2=L$, $L_3=A$. Коэффициенты $u_{ik}=u_{ik}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots)$, всех операторов L_i можно алгоритмически выразить через тэта-функцию и ее производные. Уравнения (1.1) есть условия совместности линейных уравнений вида

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i} = L_i \psi, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1.3}$$

[1] Как сообщил авторам И. М. Кричевер, в самое последнее время им найден подход к доказательству необходимости условий сформулированной теоремы для уравнения КП1, основанный на использовании спектральной теории нестационарного оператора Шредингера $i\partial_y + \partial_x^2 + u$ с периодическими коэффициентами (см. [10]). Подход работы [10] применим также к описанию условий вещественности для конечнозонных двумерных операторов Шредингера с периодическими коэффициентами.

где $\psi=\psi(\boldsymbol{x}; P)$, $P\in\Gamma$ — функция Бейкера — Ахиезера на римановой поверхности Γ, имеющая там g полюсов и существенную особенность в точке P_∞ вида

$$\psi(\boldsymbol{x}; P)=e^{\sum x_i k^i}\left(1+\frac{\xi_1(\boldsymbol{x})}{k}+\frac{\xi_2(\boldsymbol{x})}{k^2}+\ldots\right),\quad k=k(P). \tag{1.4}$$

Объясним, следуя [14], как свести систему уравнений (1.1) на функции $u_{ik}(\boldsymbol{x})$ к системе уравнений только на одну функцию. Оказывается, существует формальный псевдодифференциальный оператор L вида

$$L=\partial_x+\sum_{j=1}^{\infty} u_j(\boldsymbol{x})\partial_x^{-j},\quad x=x_1, \tag{1.5}$$

такой, что

$$L_i=[L^i]_+,\quad i=1, 2, \ldots, \tag{1.6}$$

где символ $[\ ]_+$ означает положительную (дифференциальную) часть псевдодифференциального оператора. (Напомним правила вычисления суперпозиции псевдодифференциального оператора с оператором умножения на функцию. Во-первых,

$$\partial_x^{-1}f=f\partial_x^{-1}-f'\partial_x^{-2}+f''\partial_x^{-3}-\ldots; \tag{1.7}$$

остальные правила отсюда выводятся.) Зависимость оператора L от переменных $x=x_1, x_2, x_3, \ldots$ определяется из уравнений типа Лакса,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=[L_i, L],\quad i=1, 2, \ldots \tag{1.8}$$

Для оператора L существует собственная функция $\psi=\psi(\boldsymbol{x}; k)$,

$$L\psi=k\psi, \tag{1.9}$$

имеющая вид (1.4), где ряды понимаются как формальные. Эта функция удовлетворяет также уравнениям (1.3). Если ввести псевдодифференциальный оператор P (по $x=x_1$), полагая

$$P=1+\xi_1(\boldsymbol{x})\partial_x^{-1}+\xi_2(\boldsymbol{x})\partial_x^{-2}+\ldots, \tag{1.10}$$

то будем иметь

$$Pe^{\sum x_j k^j}=\psi(\boldsymbol{x}; k), \tag{1.11}$$

$$L=P\partial_x P^{-1}. \tag{1.12}$$

Далее, функция $\psi(\boldsymbol{x}; k)$ представима в виде

$$\psi(\boldsymbol{x}; k)=e^{\sum x_j k^j}\,\frac{\tau\left(x_1-k^{-1}, x_2-\frac{1}{2}k^{-2}, x_3-\frac{1}{3}k^{-3}, \ldots\right)}{\tau(x_1, x_2, x_3, \ldots)}, \tag{1.13}$$

где τ-функция $\tau(\boldsymbol{x})$ определена, вообще говоря, на финитных последовательностях $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots)$, на тех же, на которых определены коэффициенты операторов L_i, L; равенство (1.13) понимается в смысле равенства формальных рядов. Это позволяет, в частности, выразить решения иерархии КП через τ-функцию и ее производные. Для решений u, w самого уравнения КП получаем

$$u=2\partial_x^2\ln\tau,\quad w=\frac{3}{2}\partial_x\partial_y\ln\tau. \tag{1.14}$$

Уравнения (1.1) иерархии КП могут быть записаны в виде набора уравнений на одну функцию $\tau(\boldsymbol{x})$. Все эти уравнения просто записываются при помощи «билинейных операторов Хироты». Напомним их определение. Если $f(x)$ — функция одной переменной, то для любого многочлена (или степенного ряда) Q действие оператора Хироты $Q(D_x)f(x)\cdot f(x)$ определяется формулой

$$Q(D_x)f(x)\cdot f(x)=Q(\partial_y)\left[f(x+y)f(x-y)\right]_{y=0}. \tag{1.15}$$

Для функций многих переменных определение аналогично. Так вот, производящая функция для уравнений иерархии КП имеет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(-2y)\,p_{j+1}(\widetilde{D})\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_iD_i\right)\tau\cdot\tau=0, \tag{1.16}$$

где $y=(y_1, y_2, \ldots)$ — вспомогательные независимые переменные, $\widetilde{D}=(D_1, 2^{-1}D_2, 3^{-1}D_3, \ldots)$, D_j — оператор Хироты по переменной x_j, $j=1, 2, \ldots$, p_j — полиномы Шура, определяемые из следующего разложения:

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_jk^j\right)=\sum_{j=0}^{\infty} k^jp_j(x_1, \ldots, x_j). \tag{1.17}$$

Все эти уравнения градуированно однородные, если приписать операторам D_i градуировку i. Первые несколько уравнений иерархии КП имеют вид

$$[4D_1D_3-3D_2^2-D_1^4]\,\tau\cdot\tau=0 \tag{1.18}$$

(это само уравнение КП 2, градуировка 4),

$$[3D_1D_4-2D_2D_3-D_1^3D_2]\,\tau\cdot\tau=0 \tag{1.19}$$

и т. д. Согласно [18], уравнения иерархии КП могут быть записаны в виде

$$\det\begin{vmatrix} p_{f_1+1}(-\widetilde{D}/2) & p_{f_1+1}(\widetilde{D}/2) & \ldots & p_{f_1+m-1}(\widetilde{D}/2)\\ p_{f_2}(-\widetilde{D}/2) & p_{f_2}(\widetilde{D}/2) & \ldots & p_{f_2+m-1}(\widetilde{D}/2)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{f_m-m+2}(-\widetilde{D}/2) & p_{f_m-m+2}(\widetilde{D}/2) & \ldots & p_{f_m}(\widetilde{D}/2)\end{vmatrix}\tau\cdot\tau=0, \tag{1.20}$$

где $f_1\geqslant f_2\geqslant\ldots\geqslant f_m\geqslant 1$ — натуральные числа, $m\geqslant 2$. Градуировка такого уравнения равна $f_1+f_2+\ldots+f_m+1$.

Замечание. Если $Q(D)\tau\cdot\tau=0$ — одно из уравнений иерархии КП, то можно считать, что в многочлене $Q(D)$ все мономы имеют четную степень по переменным $D_1, D_2, \ldots$, поскольку мономы нечетной степени дают тривиальные операторы Хироты.

Замена формального параметра k вида

$$k=f(k')=\lambda_{-1}k'+\lambda_0+\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_jk'^{-j}, \quad \lambda_{-1}\neq 0, \tag{1.21}$$

приводит к некоторому преобразованию, сохраняющему вид уравнений иерархии КП. Во-первых, происходит треугольное преобразование переменных $x_1, x_2, \ldots$ по закону

$$x_i'=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_{ij}x_j, \quad i=1, 2, \ldots, \tag{1.22}$$

где треугольная матрица (μ_{ij}) определяется из условий

$$[f(k')]^j=\sum_{i=0}^{\infty}\mu_{ij}k'^i+O(k'^{-1}), \quad j=1, 2, \ldots \tag{1.23}$$

Кроме того, меняются и операторы L_i. Их преобразование определяется, согласно (1.9), преобразованием оператора $L\mapsto L'$, где $L=f(L')$. Новая ψ-функция определяется из условия

$$\psi'(\boldsymbol{x}'; k')=\exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\mu_{0j}x_j\right)\psi(\boldsymbol{x}; f(k')), \tag{1.24}$$

где переменные $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{x}'$ связаны соотношениями (1.22). Она также выражается через новую τ-функцию $\tau'(\boldsymbol{x}')$ по формулам вида (1.13). Функцию $\tau'(\boldsymbol{x}')$ будем называть *эквивалентной* функции $\tau(\boldsymbol{x})$. (Явный вид преобразования $\tau(\boldsymbol{x})\mapsto\tau'(\boldsymbol{x}')$ для некоторых специальных замен $k\mapsto k'$ мы укажем ниже.) Система (1.20) инвариантна относительно преобразований $\tau(\boldsymbol{x})\mapsto\tau'(\boldsymbol{x}')$. Кроме того, эта система инвариантна относительно «калибровочных преобразований» вида

$$\tau(\boldsymbol{x})\mapsto e^{\sum\alpha_i x_i+\beta}\tau(\boldsymbol{x}). \tag{1.25}$$

Это вытекает из того, что для любого многочлена Q соответствующий оператор Хироты $Q(D)\tau\cdot\tau$ обладает свойством

$$Q(D)\tau'\cdot\tau'=e^{2\left(\sum\alpha_i x_i+\beta\right)}Q(D)\tau\cdot\tau,\quad \tau'=e^{\sum\alpha_i x_i+\beta}\tau. \tag{1.26}$$

Алгеброгеометрические решения иерархии КП определяются, согласно [9], тройкой (Γ, P_∞, k) и дивизором D (см. выше введение). Фиксация канонического базиса циклов позволяет выразить эти решения через тета-функцию поверхности Γ в виде

$$\tau(\boldsymbol{x})=e^{Q(\boldsymbol{x})}\theta(x_1U_1+x_2U_2+\ldots+z_0), \tag{1.27}$$

где z_0 — произвольный g-мерный вектор, определяемый по дивизору D; g-мерные векторы $U_1, U_2, \ldots$ определяются через разложения базисных голоморфных дифференциалов $\omega_1, \ldots, \omega_g$ при $P\to P_\infty$:

$$\omega_j=[(U_1)_j+(U_2)_jz+(U_3)_jz^2+\ldots]dz,\quad z=k^{-1},\quad j=1,2,\ldots,g. \tag{1.28}$$

В частности, $U_1=U$, $U_2=V$, $U_3=W$. Далее, если Ω_n — нормированные голоморфные дифференциалы второго рода с главной частью в точке P_∞ вида

$$\Omega_n=d(k^n)+\text{правильные члены},\quad n=1,2,\ldots, \tag{1.29}$$

и коэффициенты q_{ij} определяются из разложений этих дифференциалов по формулам

$$\int\Omega_n=k^n+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q_{mn}}{mk^m}, \tag{1.30}$$

то квадратичная форма $Q(\boldsymbol{x})$ имеет вид

$$Q(\boldsymbol{x})=\sum_{i,j=1}^{\infty}q_{ij}x_ix_j. \tag{1.31}$$

Это немедленно вытекает из сопоставления формулы Кричевера для функции Бейкера — Ахиезера ψ с определением τ-функции (1.13) (см. [14]). Все ряды в (1.27) сходятся при подходящих аналитических условиях на бесконечный вектор $\boldsymbol{x}$.

Перейдем к доказательству теоремы. Нам, во-первых, будет удобно перейти от уравнений иерархии КП, записанных в виде квадратичных уравнений на τ-функцию, к уравнениям на логарифмическую производную τ-функции. Для этого надо поделить все эти уравнения на τ^2 и воспользоваться следующим утверждением.

ЛЕММА 1. *Для операторов Хироты справедливы следующие соотношения:*

$$\tau^{-2}D_{i_1}\ldots D_{i_n}\tau\cdot\tau=2(\ln\tau)_{i_1\ldots i_n}+$$
$$+\sum_{q=1}^{n}\sum_{(i')}\lambda_{(i)}^{(i')}(\ln\tau)_{i_1'\ldots i_{k_1}'}(\ln\tau)_{i_{k_1+1}'\ldots i_{k_2}'}\ldots(\ln\tau)_{i_{k_q+1}'\ldots i_n'},\qquad(1.32)$$

где $n=2k$, внутренняя сумма ведется по всем перестановкам $i_1',\ldots,i_n'$ индексов $i_1,\ldots,i_n$, $\lambda_{(i)}^{(i')}$ — некоторые универсальные рациональные коэффициенты, $(\ln\tau)_{i_1\ldots i_n}=\ln(\tau)_{x_{i_1}\ldots x_{i_n}}$, причем в правую часть не входят логарифмические производные первого порядка.

Доказательство. Левая часть равенства (1.32) выражается только через логарифмические производные функции τ ввиду ее инвариантности относительно преобразований $\tau\mapsto c\tau$, c — константа. Главный член в правой части вычисляется прямо из определения операторов Хироты. Логарифмические производные первого порядка в правой части отсутствуют из-за инвариантности левой части относительно калибровочных преобразований (1.25) (см. (1.26)). Лемма доказана.

В частности,

$$D_iD_j\tau\cdot\tau=2\tau^2(\ln\tau)_{ij},\qquad(1.33)$$
$$D_1^4\tau\cdot\tau=2\tau^2(\ln\tau)_{1111}-4\tau^2((\ln\tau)_{11})^2.\qquad(1.34)$$

Положим $v=\ln\tau$. Обозначим также

$$v_{i_1\ldots i_n}=\frac{\partial}{\partial_{x_{i_1}}}\ldots\frac{\partial}{\partial_{x_{i_n}}}v.\qquad(1.35)$$

Производные по переменной $x=x_1$ будем обозначать также следующим образом:

$$v^{(k)}=\frac{\partial^k v}{\partial x_1^k}.\qquad(1.36)$$

Если τ-функция имеет вид (1.27), то все эти логарифмические производные являются абелевыми функциями (мероморфными функциями на якобиане поверхности Γ) при $n\geqslant2$ или $k\geqslant2$. При ограничении их, например, на комплексную ось x они становятся мероморфными квазипериодическими функциями.

ЛЕММА 2. *Пусть функция τ удовлетворяет иерархии* КП. *Тогда функция $v=\ln\tau$ удовлетворяет уравнениям вида*

$$v_{ij}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{t_1+\ldots+t_m+s_1+\ldots+s_m=i+j}R_{t_1\ldots t_m}^{s_1\ldots s_m}(i,j)\,v_{t_1}^{(s_1)}\ldots v_{t_m}^{(s_m)},\qquad(1.37)$$

где $i,j=2,3,\ldots,R_{t_1\ldots t_m}^{s_1\ldots s_m}(i,j)$ — некоторые универсальные рациональные коэффициенты.

Здесь и далее в этом параграфе все индексы суммирования натуральные.

Доказательство. Будем вести индукцию по сумме $i+j$, начиная с $i+j=4$. При $i=j=2$ в силу уравнения КП (1.18) и формул (1.33), (1.34) будем иметь

$$v_{22}=\frac{4}{3}v_3^{(1)}-\frac{1}{3}[v^{(4)}-2((v^{(2)})^2].\qquad(1.38)$$

Это и есть единственное из нетривиальных соотношений (1.37), поскольку $v^{(4)}=v_1^{(3)}$ и т. д.

Предположим, утверждение леммы доказано при всех $i+j\leqslant N$. Заметим, прежде всего, что из этого предположения вытекает, что

$$v_{i_1\ldots i_n}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{t_1+\ldots+t_m+s_1+\ldots+s_m=i_1+\ldots+i_n} R_{t_1\ldots t_m}^{s_1\ldots s_m}(i_1,\ldots,i_n)v_{t_1}^{(s_1)}\ldots v_{t_m}^{(s_m)} \qquad (1.39)$$

при $n\geqslant 2$ и $i_1+\ldots+i_n\leqslant N+n-2$, где $R_{t_1\ldots t_m}^{s_1\ldots s_m}(i_1,\ldots,i_n)$ — некоторые универсальные рациональные коэффициенты (все индексы суммирования, как и в (1.37), натуральные). Это моментально доказывается при помощи дифференцирования уравнений (1.37). Сделаем теперь шаг индукции по $i+j$. Пусть $i+j=N+1$, $i\geqslant j\geqslant 1$. Докажем в этом случае справедливость соотношения (1.37) индукцией по j. При $j=1$ это тавтология. Чтобы продвинуться в область бо́льших значений j, используем иерархию КП. Возьмем уравнение (1.20) с $m=3$, $f_1=i-1$, $f_2=j-1$, $f_3=1$. Поскольку $p_0=1$, $p_i(x_1,\ldots,x_i)=x_i+\ldots$, где многоточием обозначены нелинейные члены, то

$$\det\begin{vmatrix} p_i\left(-\frac{\widetilde{D}}{2}\right) & p_i\left(\frac{\widetilde{D}}{2}\right) & p_{i+1}\left(\frac{\widetilde{D}}{2}\right) \\ p_{j-1}\left(-\frac{\widetilde{D}}{2}\right) & p_{j-1}\left(\frac{\widetilde{D}}{2}\right) & p_j\left(\frac{\widetilde{D}}{2}\right) \\ 1 & 1 & \frac{1}{2}D_1 \end{vmatrix}=$$

$$=2^{-3}\det\begin{vmatrix} -\frac{1}{i}D_i+\ldots & \frac{1}{i}D_i+\ldots & \frac{1}{i+1}D_{i+1}+\ldots \\ -\frac{1}{j-1}D_{j-1}+\ldots & \frac{1}{j-1}D_{j-1}+\ldots & \frac{1}{j}D_j+\ldots \\ 2 & 2 & D_1 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{ij}D_iD_j-\frac{1}{(i+1)(j-1)}D_{i+1}D_{j-1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{q=4}^{\infty}\sum_{r_1+\ldots+r_q=N+1}P_{r_1\ldots r_q}^{ij}D_{r_1}\ldots D_{r_q}\right\}\tau\cdot\tau=0.$$

Здесь $P_{r_1\ldots r_q}^{ij}$ — некоторые универсальные рациональные коэффициенты. Условия на индексы суммирования получаются автоматически в силу того, что это уравнение имеет градуировку $f_1+f_2+f_3+1=i+j=N+1$. Умножим обе части этого уравнения на τ^{-2}. В силу леммы 1 получим

$$\frac{1}{ij}v_{ij}=\frac{1}{(i+1)(j-1)}v_{(i+1),(j-1)}+$$

$$+\sum_{q=4}^{\infty}\sum_{r_1+\ldots+r_q=N+1}P_{r_1\ldots r_q}^{ij}\left[v_{r_1\ldots r_q}+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{q}\sum_{(r')}\lambda_{(r)}^{(r')}v_{r_1'\ldots r_{k_1}'}\ldots v_{r_{k_p+1}'\ldots r_q'}\right]. \qquad (1.40)$$

Производная $v_{(i+1),(j-1)}$ представляется в виде (1.37) в силу предположения индукции по j. А выражения, стоящие в квадратных скобках, представляются в виде многочлена от $v_m^{(n)}$ в силу (1.39). Лемма доказана.

Изучим особо вид некоторых линейных по $v_t^{(s)}$ членов в формулах (1.37), (1.39). Их можно было бы вычислить по ходу доказательства леммы 2, но чтобы избежать громоздкости, мы выделим это вычисление в виде отдельной леммы.

ЛЕММА 3. *Для коэффициентов* $R_{t_1}^{s_1}(i_1, \ldots, i_n)$ *в линейных по* $v_t^{(s)}$ *членах в формулах* (1.37), (1.39) *выполняются следующие соотношения:*

$$R_{i+j-1}^{1}(i, j) = \frac{ij}{i+j-1}, \tag{1.41}$$

$$R_{t_1}^{s_1}(i_1, \ldots, i_n) = 0 \text{ при } s_1 \leqslant n-2, \tag{1.42}$$

$$R_{i_1+\ldots+i_n-n+1}^{n-1}(i_1, \ldots, i_n) = \frac{i_1 \ldots i_n}{i_1 + \ldots + i_n - n + 1}. \tag{1.43}$$

Доказательство. Как и в лемме 2, будем вести индукцию по $i_1+\ldots+i_n$. При $i_1+\ldots+i_n=4$ (единственный нетривиальный случай здесь $n=2$, $i_1=i_2=2$) все вытекает из (1.18). Предположим, что (1.41) уже доказано при $i+j\leqslant N$. Покажем, прежде всего, что отсюда вытекают (1.42), (1.43) при $i_1+\ldots+i_n\leqslant N+n-2$. Действительно, продифференцируем равенство

$$v_{i_1 i_2} = \frac{i_1 i_2}{i_1+i_2-1} v_{i_1+i_2-1}^{(1)} + \sum_{s=2}^{i_1+i_2-1} R_{i_1+i_2-s_1}^{s_1}(i_1, i_2)\, v_{i_1+i_2-s_1}^{(s_1)} +$$
$$+ \sum_{(m=2)}^{\infty} \sum_{t_1+\ldots+t_m+s_1+\ldots+s_m=i_1+i_2} R_{t_1\ldots t_m}^{s_1\ldots s_m}(i_1, i_2)\, v_{t_1}^{(s_1)} \ldots v_{t_m}^{(s_m)}$$

по x_{i_3}. Получим

$$v_{i_1 i_2 i_3} = \frac{i_1 i_2}{i_1+i_2-1} v_{i_1+i_2-1, i_3}^{(1)} + \sum_{s_1=2}^{i_1+i_2-1} R_{i_1+i_2-s_1}^{s_1}(i_1, i_2)\, v_{i_1+i_2-s_1, i_3}^{(s_1)} +$$
$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{(s),(t)} R_{t_1\ldots t_m}^{s_1\ldots s_m}(i_1, i_2)\, [v_{t_1}^{(s_1)} \ldots v_{t_m}^{(s_m)}]_{i_3}.$$

Ясно, что дифференцирование нелинейных членов и их последующее преобразование по формуле (1.37) не повлияет на линейные члены. Далее, после преобразования линейных членов по формуле (1.37), можно по предположению индукции воспользоваться (1.41) при $i_1+i_2-1+i_3\leqslant N$, т. е. при $i_1+i_2+i_3\leqslant N+1$. Получим

$$v_{i_1 i_2 i_3} = \frac{i_1 i_2 i_3}{i_1+i_2+i_3-2} v_{i_1+i_2+i_3-2}^{(2)} + \sum_{s_1=3}^{i_1+i_2+i_3-1} R_{i_1+i_2+i_3-s_1}^{s_1}(i_1, i_2, i_3)\, v_{i_1+\ldots+i_3-s_1} + \ldots,$$

где многоточие обозначает нелинейные члены. Это и означает справедливость (1.42), (1.43) при $n=3$. Потом дифференцируем последнее равенство по i_4 и т. д.

Итак, (1.42), (1.43) выведены из (1.41) (при указанных ограничениях на $i_1+\ldots+i_n$). Сделаем теперь шаг индукции по $i+j$ в (1.41). Для этого, как и в лемме 2, воспользуемся уравнением (1.40) иерархии КП. Пусть $i+j=N+1$ в этом уравнении. Заметим, что слагаемые в (1.40) с $q\geqslant 4$ не дадут вклада в линейные по $v_s^{(t)}$ члены. Это немедленно вытекает из (1.42). Поэтому из (1.40) получаем

$$\frac{1}{ij} R_{i+j-1}^{1}(i, j) = \frac{1}{(i+1)(j-1)} R_{i+j-1}^{1}(i+1, j-1).$$

Отсюда и вытекает (1.41), поскольку по определению R_{i+j-1}^{1} $(i+j-1, 1) = 1$. Лемма доказана.

Следствие. *При* $s_1+\ldots+s_m<m+n-2$ *и* $t_1+\ldots+t_m+s_1+\ldots+s_m=$ $=i_1+\ldots+i_n$ *справедливы равенства*

$$R^{s_1\ldots s_m}_{t_1\ldots t_m}(i_1,\ \ldots,\ i_n)=0. \tag{1.44}$$

Доказательство очевидно.

ЛЕММА 4. *При заменах параметра* k *вида*

$$k=k'+\frac{a}{(k')^q}+O\left((k')^{-q-1}\right) \tag{1.45}$$

логарифмические производные τ-*функции преобразуются по закону*

$$\begin{gathered} v_l^{(1)}\mapsto v_l^{(1)} \ \text{при}\ l<q, \\ v_q^{(1)}\mapsto v_q^{(1)}+qa. \end{gathered} \tag{1.46}$$

Доказательство. Определим функции $\eta_s(x)$ равенством

$$\ln\psi=\sum_{j=1}^{\infty}x_jk^j+\sum_{s=1}^{\infty}\eta_sk^{-s}, \tag{1.47}$$

где $\psi=\psi(x;\,k)$ — собственная функция для операторов иерархии КП. В силу (1.13) имеем $\eta_1=\partial_{x_1}\ln\tau$. Подставляя (1.45) в (1.47), получим

$$\ln\psi=\sum_{j=1}^{\infty}x_jk^j+\sum_{s=1}^{\infty}\eta_sk^{-s}=\sum_{j=1}^{q}x_jk'^j+O\left(k'\right)^{q+1}+\left(qax_q+\eta_1\right)(k')^{-1}+O|(k')^{-2}.$$

Отсюда получаем: $x_l\mapsto x_l$ при $l\leqslant q$. Дифференцируя по этим x_l, получаем (1.46). Лемма доказана.

Перейдем теперь к основной для доказательства вещественности римановой поверхности лемме — своего рода «теореме единственности» для иерархии КП.

ЛЕММА 5. *Пусть* τ, $\tilde{\tau}$ — *два решения иерархии* КП, *вида* (1.27) *таких, что соответствующие* (*см.* (1.14)) *функции* u, w *и* $\tilde{u}$, $\tilde{w}$ *совпадают как функции от* x, y. *Тогда после подходящей* (*формальной*) *замены параметра* k *вида*

$$k=k'+\sum_{j=3}^{\infty}c_j\,(k')^{-j} \tag{1.48}$$

функция τ *перейдет в функцию* $\tilde{\tau}$ (*с точностью до калибровки* (1.25)).

Доказательство. Подберем замену $k\mapsto k'$ так, чтобы для логарифмических производных функции $\tau'(x')$, эквивалентной $\tau(x)$, выполнялись равенства

$$v_j'^{(1)}\big|_x=\tilde{v}_j^{(1)}\big|_x,\quad j=2,\,3,\,\ldots \tag{1.49}$$

При этом можно считать, что замена имеет вид (1.48), так как $v_{11}\big|_{x,y}=$ $=\tilde{v}_{11}\big|_{x,y}$, $v_2{}^{(1)}\big|_{x,y}=\tilde{v}_2{}^{(1)}\big|_{x,y}$ по условию леммы. Эту замену $k\mapsto k'$ будем строить индуктивно, шаг за шагом. Допустим, замена уже выбрана так, что равенства (1.49) выполнены при $j\leqslant N$. Для логарифмических производных функции τ' будем иметь уравнения (1.39). В частности,

$$\begin{gathered} v'^{(1)}_{\underbrace{2\ldots 2}_{N}}=\frac{2^N}{2N+1}v'^{(N)}_{N+1}+\sum_{q=1}^{N}c_{q,N}v'^{(N+q)}_{N+1-q}+ \\ +\sum_{m=2}^{\infty}\ \sum_{\substack{t_1+\ldots+t_m+s_1+\ldots+s_m=2N+1\\ s_1+\ldots+s_m\geqslant m+N-1}}R^{s_1\ldots s_m}_{t_1\ldots t_m}(2,\,2,\,\ldots,\,2,\,1)\,v'^{(s_1)}_{t_1}\ldots v'^{(s_m)}_{t_m}. \end{gathered} \tag{1.50}$$

Здесь $c_{q,N}$ — некоторые рациональные коэффициенты. В силу леммы 3 и следствия из нее, все слагаемые в (1.50), кроме первого, являются полиномами от $v_t'^{(s)}$ при $t\leqslant N$. Аналогичное уравнение имеется и для $\widetilde{v}$. В силу условий леммы и предположения индукции будем иметь

$$v_{N+1}'^{(N)}|_x=\widetilde{v}_{N+1}^{(N)}|_x. \tag{1.51}$$

Поскольку $v_{N+1}'^{(1)}|_x$ и $\widetilde{v}_{N+1}^{(1)}|_x$ — квазипериодические мероморфные функции, из (1.51) вытекает, что

$$v_{N+1}'^{(1)}|_x=\widetilde{v}_{N+1}^{(1)}|_x+c, \tag{1.52}$$

где c — константа. Сделаем теперь замену параметра k', полагая

$$k'=k''+\frac{c}{(N+2)\,(k'')^{N+1}}.$$

После такой замены в силу леммы 4 равенства (1.49) при $j\leqslant N$ сохранятся, а $v_{N+1}''^{(1)}|_x$ будет равно $\widetilde{v}_{N+1}^{(1)}|_x$. Это завершает шаг индукции.

Теперь нетрудно завершить и доказательство леммы. В силу формул (1.39) из (1.49) вытекает

$$v_{i_1\ldots i_n}'|_x=\widetilde{v}_{i_1\ldots i_n}|_x,\qquad n\geqslant 2, \tag{1.53}$$

при всех $i_1,\ldots,i_n$. Поэтому все эти логарифмические производные совпадают и на всех (финитных) векторах $\boldsymbol{x}$. Значит, функции τ' и $\widetilde{\tau}$ калибровочно эквивалентны. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 1. Если интересоваться только ограничением τ-функций на конечное число переменных $x_1, x_2, \ldots, x_N$, где N — любое фиксированное число, то в формулировке леммы можно ограничиться лишь полиномиальными заменами параметра.

З а м е ч а н и е 2. Справедлива также очевидная модификация утверждения леммы 5: можно заменять на эквивалентную не только функцию τ (при помощи репараметризации (1.48)), но и функцию $\widetilde{\tau}$ при помощи аналогичной замены соответствующего параметра k,

$$\widetilde{k}=\widetilde{k}'+\sum_{j=3}^{\infty}\widetilde{c}_j\,(\widetilde{k}')^{-j}. \tag{1.54}$$

После замен (1.48), (1.54) мы получим совпадение τ-функций, $\tau'=\widetilde{\tau}'$.

Приступим теперь уже непосредственно к доказательству вещественности римановой поверхности Γ. Начнем с уравнения КП 2. Итак, нам известно, что функции u, w вида (1.14) вещественные как функции от x, y, t, где τ-функция в (1.14) построена по Γ. Покажем, во-первых, что после надлежащего выбора локального параметра k^{-1} функцию $\tau(\boldsymbol{x})$ можно сделать вещественной. Положим $\widetilde{\tau}(\boldsymbol{x})=\overline{\tau(\overline{\boldsymbol{x}})}$. Функция $\widetilde{\tau}(\boldsymbol{x})$ выражается через тэта-функции и абелевы интегралы сопряженной римановой поверхности $\overline{\Gamma}$ по отношению к локальному параметру $\widetilde{k}=\overline{k}$. Для функций τ, $\widetilde{\tau}$ выполняются все условия леммы 5. Это позволяет выбрать локальные параметры k' (на Γ) и $\widetilde{k}'$ (на $\overline{\Gamma}$) так, чтобы $\tau|_{x_1,\ldots,x_N}=\widetilde{\tau}|_{x_1,\ldots,x_N}$ с точностью до калибровки (1.25) при любом фиксированном значении N. При этом в заменах (1.48), (1.54) коэффициенты c_j, $\widetilde{c}_j$ можно выбрать комплексно сопряженными, $\widetilde{c}_j=\overline{c}_j$, $j=3,4,\ldots$, поскольку на каждом шаге алгоритма леммы 5 константа $c=(\ln\tau)_{1,N+1}-(\ln\widetilde{\tau})_{1,N+1}$ в формуле (1.52) мнимая. Таким образом, построенная по тройке

(Γ, P_∞, k') функция $\tau(x)$ и совпадающая с ней построенная по тройке $(\overline{\Gamma}, \overline{P}_\infty, \overline{k'})$ функция $\overline{\tau(\overline{x})}$ — обе вещественные при ограничении на указанные N переменных (выбором N мы распорядимся позднее). Штрих у нового локального параметра мы в дальнейшем будем опускать.

Используем теперь конструкцию двойственной функции Бейкера — Ахиезера. Пусть

$$P^+ = 1 + (-\partial^{-1})\xi_1 + (-\partial)^{-2}\xi_2 + \dots \tag{1.55}$$

— оператор, формально сопряженный к оператору (1.10). Двойственную функцию $\psi^+(x; k)$ определяем равенством

$$\psi^+(x; k) = P^{+^{-1}} e^{-\sum x_i k^i}. \tag{1.56}$$

Функция $\psi^+ = \psi^+(x; k)$ является собственной для формально сопряженных операторов

$$L^+\psi^+ = k\psi^+, \quad L^+ = -\partial + (-\partial)^{-1}u_1 + (-\partial)^2 u_2 + \dots = -(P^+)^{-1}\partial P^+, \tag{1.57}$$

$$\frac{\partial\psi^+}{\partial x_n} = L_n^+, \quad L_n^+ = [L^{+^n}]_+, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.58}$$

Для алгеброгеометрических решений, где $\psi(x; k)$ есть разложение функции Бейкера — Ахиезера, построенной по тройке (Γ, P_∞, k) и некоторому дивизору полюсов D, $\psi^+(x; k)$ также есть разложение функции Бейкера — Ахиезера для той же тройки (Γ, P_∞, k) с дивизором полюсов D^+, где

$$D^+ + D - 2P_\infty \sim K, \tag{1.59}$$

через K обозначен канонический класс поверхности Γ, тильда обозначает линейную эквивалентность (см. [14, 11]). Функция $\psi^+(x; k)$ выражается через τ по формуле

$$\psi^+(x; k) = e^{-\sum x_i k^i} \frac{\tau\left(x_1 + k^{-1}, x_2 + \frac{1}{2}k^{-2}, x_3 + \frac{1}{3}k^{-3}, \dots\right)}{\tau(x_1, x_2, \dots)}. \tag{1.60}$$

Их произведение $\psi(x; k)\psi^+(x; k)$ будет разложением мероморфной функции на Γ. Это разложение имеет вид

$$\begin{aligned}
\psi(x; k)\psi^+(x; k) &= \frac{\tau\left(x_1 - k^{-1}, x_2 - \frac{1}{2}k^{-2}, \dots\right)\tau\left(x_1 + k^{-1}, x_2 + \frac{1}{2}k^{-2}, \dots\right)}{\tau^2(x_1, x_2, \dots)} = \\
&= \tau^{-2}\left[\tau\left(x_1 - y_1 - k^{-1}, x_2 - y_2 - \frac{1}{2}k^{-2}, \dots\right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \tau\left(x_1 + y_1 + k^{-1}, x_2 + y_2 + \frac{1}{2}k^{-2}, \dots\right)\right]_{y=0} = \\
&= \tau^{-2}\exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{ik^i}y_i\partial_{y_i}\right\}[\tau(x - y)\tau(x + y)]_{y=0} = \\
&= \tau^{-2}\exp\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{ik^i}D_i\right\}\tau\cdot\tau = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{k^{-j}p_j(\widetilde{D})\tau\cdot\tau}{\tau^2} \equiv \sum_{j=0}^{\infty}\varphi_j(x)k^{-j},
\end{aligned}$$

где все коэффициенты $\varphi_j = \tau^{-2}p_j(\widetilde{D})\tau\cdot\tau$ (при $j>0$) выражаются в виде полиномов от $v_{i_1 \dots i_n}$ при $n \geqslant 2$. В частности, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = u/2$. Отметим, что коэффициенты φ_i не чувствуют калибровочного произвола в τ-функции. Следовательно, они вещественны при вещественных $x_1, \dots, x_N$.

Пусть a и b — два вещественных числа таких, что значения $u_1=u|_{x_1=a}$ и $u_2=u|_{x_1=b}$ определены и различны ($x_i=0$ при $i\geqslant 2$). Введем две мероморфные функции z, w степени $2g$ на Γ, полагая

$$z=\psi\psi^+|_{x_1=a},\quad w=\psi\psi^+|_{x_1=b}. \tag{1.61}$$

Эти функции удовлетворяют алгебраическому уравнению вида

$$F(z, w)\equiv\sum a_{ij}z^i w^j=0, \tag{1.62}$$

где $F(z, w)$ — многочлен степени $2g$ по каждой переменной, задающий в $\mathbf{C}^2$ с координатами z, w аффинную часть римановой поверхности Г. Покажем, что все коэффициенты a_{ij} многочлена F можно выбрать вещественными. Действительно, они определяются из линейных однородных систем, коэффициенты которых полиномиально выражаются через $\varphi_k(x_1=$ $=a)$ и $\varphi_l(x_1=b)$. (Для доказательства достаточно разложить (1.62) по степеням k^{-1} в окрестности точки P_∞.) В силу вещественности φ_k и φ_l при $k, l\leqslant N$ можно выбрать вещественными и все a_{ij} (здесь и выбирается N так, чтобы система уравнений на a_{ij} имела единственное с точностью до множителя решение).

Раз коэффициенты a_{ij} уравнения (1.62) вещественны, поверхность Г инвариантна относительно инволюции σ вида

$$\sigma(z, w)=(\bar z, \bar w). \tag{1.63}$$

Точка P_∞, имеющая координаты $z(P_\infty)=w(P_\infty)=1$, неподвижна относительно σ.

Осталось доказать, что локальный параметр k, по отношению к которому τ-функция вещественна, инвариантен относительно инволюции σ. Действительно, функция

$$\tilde k=\frac{u_1}{2(z-1)}=k+O(1) \tag{1.64}$$

дает вещественный локальный параметр в окрестности P_∞. Поэтому и параметр k вещественный. Тем самым доказательство п. 1° основной теоремы для уравнения КП 2 полностью завершено.

Для уравнения КП 1 в уравнениях иерархии КП нужно сделать замену $x\mapsto ix$, после чего все рассуждения повторяются дословно. Отметим, что все уравнения (1.20) иерархии КП после такой замены по-прежнему будут иметь вещественные коэффициенты (кое-где изменятся знаки). То же справедливо и по отношению к уравнениям (1.37), (1.39) (в последних при нечетном n нужно будет сократить на i).

Замечание. Из всех уравнений (1.20) иерархии КП мы использовали в доказательстве лишь небольшую часть — уравнения с $m=3$, $f_3=1$. Это обстоятельство не является случайным. Одним из объяснений важности именно этих уравнений иерархии служит следующее

Утверждение 1. *Уравнения* (1.20) *с* $m=3$, $f_3=1$, $f_1\geqslant f_2\geqslant 1$ *произвольны, дифференциально порождают все остальные уравнения иерархии* КП.

Доказательство. Из уравнений (1.37), (1.39), являющихся дифференциальными следствиями указанных в формулировке утверждения уравнений (1.20), можно однозначно (с точностью до калибровочных преобразований (1.25)) восстановить функцию $\tau(x)$ по «данным Коши» $v_i^{(1)}|_x$, $i=1, 2, \ldots$ Покажем, что эта функция будет являться решением и всех остальных уравнений иерархии КП. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что в качестве «данных Коши» $v_i^{(1)}|_x$, $i=1, 2, \ldots$, можно взять произвольные функции от x. Для доказательства последнего предложения заметим, что коэффициенты $u_1(x)$, $u_2(x), \ldots$ оператора L (1.5) являются независимыми данными Коши для иерархии КП, записанной в виде (1.8). Отсюда вытекает и независимость данных Коши $v_i^{(1)}$, $i=1, 2, \ldots$, в силу следующей леммы.

ЛЕММА 6. *Коэффициенты $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... оператора L связаны с функциями $v_1^{(1)}(x)$, $v_2^{(1)}(x), \ldots$ обратимым преобразованием вида*

$$u_j(x) = U_j(v_1^{(1)}(x), \ldots, v_j^{(1)}(x)), \quad v_j^{(1)}(x) = V_j(u_1(x), \ldots, u_j(x)), \\ j = 1, 2, \ldots, \tag{1.65}$$

где U_j, V_j — полиномы от своих аргументов и их производных по x.

Доказательство. Согласно [14], справедливы соотношения вида

$$v_n^{(1)} = nu_n + \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где многоточием обозначен полином от функций $u_1, \ldots, u_{n-1}$ и их производных по x. Отсюда вытекает справедливость леммы, а вместе с ней и утверждения 1.

Ясно, что перечисленные в этом утверждении уравнения (1.20) являются минимальным набором уравнений, дифференциально порождающих всю иерархию КП.

§ 2. Окончание доказательства основной теоремы для уравнения КП2

Используем, во-первых, доказанную в предыдущем параграфе вещественность τ-функции (с точностью до калибровочного преобразования (1.25)) при вещественных значениях аргументов:

$$\overline{\tau(\boldsymbol{x})} = e^{\sum \alpha_i x_i + \beta} \tau(\boldsymbol{x}). \tag{2.1}$$

Для функции Бейкера — Ахиезера (1.13) отсюда следует, что

$$\overline{\psi(\boldsymbol{x}; \sigma(P))} = \exp\left[-\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i k^{-i}}{i}\right] \psi(\boldsymbol{x}; P), \quad k = k(P) \to \infty.$$

Таким образом, коэффициенты разложения мероморфной всюду на Γ функции $\overline{\psi(\boldsymbol{x}; \sigma(P))}/\psi(\boldsymbol{x}; P)$ в ряд по степеням k^{-1} (в окрестности точки P_∞) не зависят от $\boldsymbol{x}$. Вычисляя их при $\boldsymbol{x}=0$, получаем, что все $\alpha_i=0$, $i=1, 2, \ldots$ Таким образом, функция Бейкера — Ахиезера, отвечающая вещественным решениям уравнения КП2, обладает следующим свойством вещественности по отношению к инволюции σ:

$$\overline{\psi(\boldsymbol{x}; \sigma(P))} = \psi(\boldsymbol{x}; P). \tag{2.2}$$

Следовательно, дивизор D полюсов функции $\psi(\boldsymbol{x}; P)$ инвариантен относительно инволюции σ.

До сих пор мы не использовали гладкость решений $u(x, y, t)$, $w(x, y, t)$. Покажем, что из их гладкости вытекает п. 4° теоремы (п. 2° является в этом случае тривиальным следствием п. 4°, поскольку каждая вещественная риманова поверхность с максимальным числом овалов относится к разделяющему типу).

Дивизор $D - gP_\infty$ степени нуль инвариантен относительно σ, т. е. лежит на вещественной компоненте якобиана $J(\Gamma)$. Другими словами, если в качестве начальной точки отображения Абеля взять P_∞, т. е.

$$A(\Gamma)=\left(\int\limits_{P_\infty}^{P}\omega_1,\ \dots,\ \int\limits_{P_\infty}^{P}\omega_g\right)\in J(\Gamma), \tag{2.3}$$

то вектор z_0, имеющий вид

$$-z_0=A(D)+K \tag{2.4}$$

(K — вектор римановых констант), удовлетворяет условию вещественности на $J(\Gamma)$:

$$\sigma(z_0)\equiv z_0. \tag{2.5}$$

Здесь индуцированная на $J(\Gamma)$ антиголоморфная инволюция обозначена той же буквой σ; знак $\equiv$ используется для обозначения равенства точек на якобиане (сравнения векторов по модулю решетки периодов; см. [16]). Предположим, что базис циклов на Γ выбран так, что плоскость, натянутая на $a_1, \dots, a_g$, инвариантна относительно σ. В этом случае векторы U, V, W касаются вещественных компонент (2.5). Вектор $z=xU+$ $+yV+tW+z_0$, являющийся аргументом тэта-функции в формулах для $u(x, y, t)$, $w(x, y, t)$, пробегает тогда при изменении x, y, t ту вещественную компоненту, на которой лежит z_0. Значениям x, y, t, при которых $\theta(z)=0$, отвечают полюсы решений $u(x, y, t)$, $w(x, y, t)$. Предположим, что на всей вещественной компоненте якобиана, проходящей через точку z_0 вида (2.4), тэта-функция не обращается в нуль. (Напомним, что нули тэта-функции имеют коразмерность единица.) Покажем, что уже из этого вытекает, что на поверхности Γ рода g должно иметься $g+1$ овалов.

Допустим, число овалов на поверхности Γ равно n; $n\geqslant 1$, поскольку $\sigma(P_\infty)=P_\infty$. Рассмотрим значения тэта-функции на векторах вида (2.4), где вектор z_0 пробегает одну из вещественных компонент якобиана. Поскольку в качестве начальной точки отображения Абеля выбрана точка P_∞, то $\theta(z_0)=0$, если и только если дивизор D содержит точку D_∞ (см. [16] по поводу нулей тета-функции). Покажем, что при $n\leqslant g$ дивизор D можно так продеформировать с сохранением условий $\sigma(D)=D$, что он будет содержать точку P_∞. Обозначим овалы через $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Пусть точка P_∞ лежит на овале Γ_n. Дивизор D, инвариантный относительно σ, представляется в виде

$$D=\sum_{i=1}^{g-2m} Q_i+\sum_{j=1}^{m}[Q_j'+\sigma(Q_j')], \tag{2.6}$$

где точки Q_i неподвижны относительно σ, т. е. лежат на вещественных овалах, а точки Q_j' «невещественны». Если хоть одна из точек Q_i лежит на овале Γ_n, то, не меняя остальных, ее можно передвинуть по Γ_n в точку P_∞. Предположим поэтому, что ни одна из точек Q_i не лежит на Γ_n. Тогда возможны два варианта:

а) $m\neq 0$. Выберем тогда путь γ, ведущий из точки Q_1' в точку P_∞, и протащим точку Q_1' в P_∞ по пути γ, а точку $\sigma(Q_1')$ в P_∞ симметричным образом по пути $\sigma(\gamma)$. После такой деформации, сохраняющей симметрию $\sigma(D)=D$, мы получим дивизор, содержащий точку P_∞.

б) $m=0$. Тогда все g точек дивизора D вещественны, и, поскольку ни одна из них не сидит на Γ_n, хотя бы на одном из овалов есть пара точек Q_i, Q_j. В этом случае их можно слить, а потом симметрично растащить в «мнимую» область, т. е. продеформировать в пару Q_1', $\tau(Q_1')$. Дальнейшая деформация строится, как и выше. Итак, случай $n\leqslant g$ противоречит гладкости.

Докажем теперь, что если выбрать базис циклов на поверхности Г с вещественными овалами $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{g+1}$, $P_\infty \in \Gamma_{g+1}$, так, что $a_i=\Gamma_i$, $i=1, \ldots$ $\ldots, g$, то вектор z_0 вида (2.4) будет иметь чисто мнимые координаты. Действительно, из приведенных выше рассуждений видно, что в случае $n=g+1$ имеется ровно одна связная вещественная компонента якобиана, на которой функция $\theta(z)$ не имеет нулей. Она образована дивизорами D степени g, где на каждом овале $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_g$ имеется ровно по одной точке дивизора (ср. [16]). Образ (2.4) таких дивизоров на якобиане в точности состоит из всех чисто мнимых векторов.

Для уравнения КП 2 теорема доказана.

§ 3. Окончание доказательства основной теоремы для уравнения КП1

В случае КП 1 для τ-функции также выполняется (2.1). Но функция Бейкера — Ахиезера $\psi(\boldsymbol{x}; P)$ теперь выражается через τ-функцию по формуле

$$\psi(\boldsymbol{x}; P)=e^{i\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k^j}\frac{\tau\left(x_1-ik^{-1},\ x_2-\dfrac{i}{2}k^{-2},\ \ldots\right)}{\tau(x_1,\ x_2,\ \ldots)} \tag{3.1}$$

(мы заменили в (1.13) $x\mapsto ix$). Аналогично перепишется и формула (1.60) для двойственной функции Бейкера — Ахиезера $\psi^+(\boldsymbol{x}; P)$, дивизор полюсов которой D^+ связан с дивизором полюсов D функции $\psi(\boldsymbol{x}; P)$ соотношением (1.59). Из (2.1) будем иметь

$$\overline{\psi(\boldsymbol{x};\sigma(P))}=\exp\left[-i\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha_j k^{-j}}{j}\right]\psi^+(\boldsymbol{x}; P).$$

Как и в предыдущем параграфе доказывается, что все $\alpha_i=0$. Другими словами

$$\overline{\psi(\boldsymbol{x};\sigma(P))}=\psi^+(\boldsymbol{x}; P). \tag{3.2}$$

Следовательно, $D^+=\sigma(D)$, т. е. дивизор D удовлетворяет соотношению

$$D+\sigma(D)\sim K+2P_\infty. \tag{3.3}$$

Дивизоры D степени g, удовлетворяющие (3.3), заметают при отображении Абеля (2.4) мнимые (относительно σ) компоненты якобиана (см. [16]). Дальше все сводится, как и в § 2, к исследованию нулей тэта-функции. Именно, если риманова поверхность Г относится к неразделяющему типу, то на мнимых компонентах якобиана $J(\Gamma)$, заметаемых дивизорами D с условием (3.3), функция $\theta(z)$ имеет нули (см. добавление к [6]). Значит, поверхность Г относится к разделяющему типу. На таких поверхностях тэта-функция не имеет нулей только на мнимой компоненте вида (0.20) (см. [16]). Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда функции $u(x)$, $w(x)$ квазипериодичны, и все g их частот «максимально несоизмеримы» (группа частот имеет ранг g над $\mathbf{Z}$), предположение теоремы об отсутствии нулей тэта-функции на всей вещественной (или мнимой) компоненте якобиана $J(\Gamma)$, отвечающей данному решению, не является, очевидно, ограничительным, так как x-обмотка всюду плотна на этой компоненте. В другом крайнем случае, когда функции $u(x)$, $w(x)$ периодичны по x с периодом T, для уравнения КП 1 от этого дополнительного предположения можно отказаться, используя только гладкость функции $u(x)$, $w(x)$. Приведем соответствующее рассуждение, следуя, в основном, [5].

Докажем сначала, что оператор

$$L = i\partial_x + \sum_{k=1}^{\infty} u_k (i\partial_x)^{-k} \tag{3.4}$$

и все операторы $L_n = [L^n]_+$ иерархии КП самосопряженные, т. е.

$$L^* \equiv \bar{L}^+ = L, \quad L_n^* = L_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

Достаточно доказать самосопряженность оператора L. Из (1.57) при $k \mapsto \bar{k}$ будем иметь $L^+\psi^+(x; \bar{k}) = \bar{k}\psi^+(x; k)$. Действуя на это равенство комплексным сопряжением и используя (3.2), получим $L^*\psi(x; k) = k\psi(x; k)$. Отсюда $L^* = L$, поскольку оператор L определяется по ψ-функции однозначно. Заметим также, что коэффициенты операторов L и L_n выражаются через логарифмические производные функции $\theta(z)$ при $z = ixU + iyV + itW + z_0$ (не ниже второго порядка в силу леммы 6). Поэтому все они являются гладкими функциями от x. Из периодичности функций $u(x)$, $w(x)$ в силу леммы 5 получаем

$$\tau(x_1 + T, x_2, x_3, \ldots) = e^{i\sum \alpha_j x_j} \tau(x_1, x_2, x_3, \ldots). \tag{3.6}$$

Следовательно, все коэффициенты операторов L, L_n периодичны по x (в силу леммы 6). Функция Бейкера — Ахиезера будет блоховской, т. е.

$$\psi(x+T; P) = e^{ipT}\psi(x; P), \tag{3.7}$$

где для величины $p = p(P)$ (квазиимпульса) имеем при $P \to P_\infty$ разложение вида

$$p(P) = k - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j k^{-j}}{j}, \quad k = k(P) \to \infty. \tag{3.8}$$

Функция $\exp(ip(P)T)$, определенная равенством (3.7), голоморфна $\Gamma \setminus P_\infty$. Поэтому функция $p(P)$ является абелевым интегралом на Γ, а ее дифференциал dp — абелевым дифференциалом с двойным полюсом в точке P_∞, все периоды которого являются целыми кратными $2\pi/T$,

$$\oint_\gamma dp = 2\pi n_\gamma T^{-1}, \quad \gamma \in H_1(\Gamma; \mathbf{Z}). \quad n_\gamma \in \mathbf{Z}. \tag{3.9}$$

Далее, напомним [9], что каждая мероморфная функция $\lambda = \lambda(P)$ на поверхности Γ с единственным полюсом n-го порядка в точке P_∞ определяет обыкновенный дифференциальный оператор M (по переменной x) n-го порядка такой, что

$$M\psi(x; P) = \lambda(P)\psi(x; P). \tag{3.10}$$

Если лорановское разложение функции $\lambda(P)$ при $P \to P_\infty$ имеет вид

$$\lambda(P) = c_0 k^n + c_1 k^{n-1} + \ldots + c_n + O(k^{-1}), \tag{3.11}$$

то оператор M выражается через операторы L_i иерархии КП по формуле

$$M = c_0 L_n + \ldots + c_n = [\lambda(L)]_+. \tag{3.12}$$

Если функция $\lambda(P)$ вещественна относительно σ, $\lambda(\sigma(P)) = \overline{\lambda(P)}$, то все коэффициенты $c_0, \ldots, c_n$ вещественны, и поэтому оператор M самосопряженный, $M^* = M$.

Покажем, что поверхность Γ с инволюцией σ относится к разделяющему типу. Из (3.2), (3.7) вытекает, что $\sigma^*[\exp(ipT)]=\exp(-i\bar{p}T)$. В силу (3.9) получаем, что функция $\operatorname{Im} p(P)$ однозначна на поверхности Γ. Она обращается в нуль на неподвижных овалах поверхности Γ. В силу самосопряженности оператора M из $\operatorname{Im} p(P)=0$ вытекает, что $\operatorname{Im}\lambda(P)=0$, т. е. нули функции $\operatorname{Im} p(P)$ точно совпадают с вещественными овалами. Следовательно, вещественные овалы разделяют Γ на две половины: $\Gamma^+=\{\operatorname{Im} p(P)<0\}$ и $\Gamma^-=\{\operatorname{Im} p(P)>0\}$. Отсюда также вытекает, что дифференциал dp положителен на вещественных овалах, ориентированных как граница Γ^+.

Выведем теперь условия на дивизор D. Условие (3.3) означает, что дивизор $D+\sigma(D)$ является дивизором нулей дифференциала Ω второго рода с двойным полюсом в точке P_∞. Условие (0.20) теоремы означает, что этот дифференциал положителен на вещественных овалах, ориентированных как граница Γ^+ (см. [16]). Для доказательства положительности дифференциала Ω построим его явно, пользуясь методами, развитыми в [4] для матричных дифференциальных операторов.

Реализуем поверхность Γ как n-листное накрытие над λ-плоскостью при помощи отображения λ (3.11). Пусть $(\lambda, 1), \ldots, (\lambda, n)$ — произвольным образом упорядоченные точки на поверхности Γ, отвечающие одному значению λ. Можно считать их различными. Построим матрицу Вронского

$$\psi_j^i(x;\lambda)=\psi^{(i-1)}(x;(\lambda, j)), \quad i, j=1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Матрица $\psi_j^i(x;\lambda)$ невырождена. Обозначим через $\varphi_j^i(x;\lambda)$ обратную матрицу. Определим дифференциалы $\Omega_j^i(x;P)$, полагая

$$\Omega_j^i(x;P)=\psi_m^i(x;\lambda)\,\varphi_j^m(x;\lambda)\,d\lambda, \quad P=(\lambda, m). \tag{3.14}$$

Легко проверяется независимость этого определения от первоначальной нумерации точек. Эти дифференциалы регулярны при $|\lambda|<\infty$ и могут иметь полюсы только в точке P_∞. Определим вид этих полюсов. Имеем

$$\psi_j^i(x;\lambda)=(\varepsilon_j\varkappa)^{i-1}e^{\varepsilon_j\varkappa x}(1+O(\varkappa^{-1})), \quad \varkappa=\sqrt[n]{\lambda c_0^{-1}}, \quad \varepsilon_j=\exp(2\pi ij/n). \tag{3.15}$$

Отсюда

$$\varphi_j^i(x;\lambda)=\frac{1}{n}(\varepsilon_j\varkappa)^{-j+1}e^{-\varepsilon_i\varkappa x}(1+O(\varkappa^{-1})). \tag{3.16}$$

Получаем

$$\Omega_j^i(x;(\lambda, m))=\frac{1}{n}(\varepsilon_m\varkappa)^{i-j}\,d\lambda\,(1+O(\varkappa^{-1})). \tag{3.17}$$

Для дифференциала $\Omega_n^1(x;P)$ из (3.17) получаем главную часть вида

$$\Omega_n^1(x;P)=dk\,(1+O(k^{-2})). \tag{3.18}$$

Положим

$$\Omega(P)=\Omega_n^1(0;P). \tag{3.19}$$

Заметим, что функция

$$\varphi(x;P)=\varphi_n^m(x;\lambda) \quad P=(\lambda, m), \tag{3.20}$$

является собственной для сопряженного оператора M^+ с собственным значением λ. Поэтому функция $\psi^+(x;P)$ может отличаться от нее лишь нормировкой,

$$\psi^+(x;P)=\frac{\varphi(x;P)}{\varphi(0;P)}=\frac{\varphi(x;P)}{\Omega(P)}d\lambda. \tag{3.21}$$

Отсюда и из (3.2) получаем

$$\psi(x;P)\overline{\psi(x;\sigma(P))}\,\Omega(P)=\psi(x;P)\,\varphi(x;P)\,d\lambda=\Omega(x;P). \qquad (3.22)$$

Итак, мы получили, что $D+\sigma(D)$ есть дивизор нулей построенного дифференциала $\Omega(P)$.

Покажем, что дифференциал $\Omega(P)$ (или $\Omega(x;P)$) положителен на овалах. Во-первых, $\Omega(x;P)$ сохраняет знак на каждом овале, так как его вещественные нули и полюсы четной кратности. Для его среднего по периоду имеем (см. [2, формула (40)])

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Omega(x;P)\,dx=dp. \qquad (3.23)$$

В силу положительности dp и $\Omega(x;P)$ положителен на каждом овале при всех x, что и требовалось доказать.

Литература

1. *Дрюма В. С.* Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега — де Фриза//Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19, вып. 12. С. 753—755.
2. *Дубровин Б. А.* Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия//Функц. анализ и его прилож. 1977. Т. 11, вып. 4. С. 28—41.
3. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения//Успехи матем. наук. 1981. Т. 36, вып. 2. С. 11—80.
4. *Дубровин Б. А.* Матричные конечнозонные операторы//Современные проблемы математики. ВИНИТИ, 1983, Т. 23. С. 33—78.
5. *Дубровин Б. А.* Геометрия абелевых многообразий и римановых поверхностей и нелинейные уравнения. Дис. ... докт. ф-м. наук. М., 1984. 268 с.
6. *Дубровин Б. А., Натанзон С. М.* Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon//Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16, вып. 1. С. 27—43.
7. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи/Под ред. С. П. Новикова. М.: Наука, 1980. 319 с.
8. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи теории рассеяния. I//Функц. анализ и его прилож. 1974. Т. 8, вып. 3. С. 43—53.
9. *Кричевер И. М.* Алгеброгеометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений//Докл. АН СССР. 1976. Т. 227, вып. 2. С. 291—294.
10. *Кричевер И. М.* Спектральная теория конечнозонных нестационарных операторов Шредингера. Нестационарная модель Пайерлса//Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. С. 87—88.
11. *Чередник И. В.* Дифференциальные уравнения для функций Бейкера — Ахиезера алгебраических кривых//Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12, вып. 3. С. 45—54.
12. *Ablowitz M. J., Fokas A. S.* On the inverse scattering of the timedependent Schrödinger equation and the associated Kadomtsev — Petviashvili equation//Stud. Appl. Math. 1983. V. 69, № 3. P. 211—228.
13. *Ablowitz M. J., Yaacov D. Bar, Fokas A. S.* On the inverse scattering transform for the Kadomtsev — Petviashvili equation//Stud. Appl. Math. 1983. V. 69, № 2. P. 135—143.
14. *Date E., Kashiwara M., Jimbo M., Miwa T.* Transformation groups for soliton equation//Proceedings of RIMS Symposium on Non-Linear Integrable Systems, ed. by M. Jimbo and T. Miwa. Singapore: World Science Publ. Co., 1983. P. 39—119.
15. *Dubrovin B. A., Krichever I. M., Novikov S. P.* Topological and algebraic geometry methods in contemporary mathematical physics. II//Soviet scientific reviews, section C. Math. Physics review. V. 3/ed. Novikov S. P. New York: Harwood Acad. Publ., 1982. P. 1—150.
16. *Fay J.* Theta-functions on Riemann surfaces//Lecture notes in math. V. 352. Springer, 1973. 137 p.
17. *Gross B. H., Harris J.* Real algebraic curves//Ann. Scient. Ecole Norm. Super. Ser. 4. 1981. V. 14, № 12. P. 157—182.
18. *Kashiwara M., Miwa T.* The τ-function of the Kadomtsev — Petviashvili equations. Transformation groups for soliton equation. I//Proc. Jap. Acad. 1981. V. 57. P. 342—347.
19. *Manakov S. V.* The inverse scattering transform for the timedependent Schrödinger equation and Kadomtsev — Petviashvili equation//Physica D. 1981. V. 3. №№ 1—2. P. 420—427.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
Центральный научно-исследовательский институт
геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Поступила в редакцию
24.XII.1985
14.X.1987