УДК 512.77+517.912+517.958

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ. I.

Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Интегрируемые системы, не имеющие «очевидной» групповой симметрии, начиная с результатов Пуанкаре—Брунса конца прошлого века, воспринимались как экзотика. Их весьма незначительный список до шестидесятых годов XX века практически не менялся. Хотя ряд основных методов математической физики базировался, по-существу, на анализе теории возмущений простейших интегрируемых примеров, представления о структуре нетривиальных интегрируемых систем реального влияния на развитие физики не оказывали.

Положение коренным образом изменилось с открытием *метода обратной задачи*. Все возрастающий интерес к этому методу связан с тем, что он оказался применим к ряду нелинейных уравнений математической физики, которые, как стало ясно к середине шестидесятых годов, обладают замечательным свойством универсальности. Они возникают при описании (в простейшем, после линейного, приближении) самых разнообразных явлений в физике плазмы, теории элементарных частиц, теории сверхпроводимости, нелинейной оптике и в ряде других задач, сводимых к пространственно одномерным. К числу таких уравнений относятся уравнение Кортевега-де Фриза, нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение sine-gordon и многие другие.

Метод обратной задачи позволил впервые обнаружить и понять ряд принципиально новых эффектов, которые не проявлялись ни в каком порядке теории возмущений. Наиболее яркие и важные из них связаны с понятием солитонов и их периодических аналогов (о которых в значительной степени будет идти речь дальше). Концепция солитонов стала одной из основных в современной нелинейной физике.

Хотя впоследствии после работ [46], [113] стало ясно, что уравнения, к которым применим метод обратной задачи, являются гамильтоновыми и, более того, полевыми аналогами вполне интегрируемых гамильтоновых систем, интегрирование этих уравнений в рамках метода обратной задачи не использует гамильтоновой теории. Гамильтоновость этих уравнений, построение для них переменных типа действие-угол оказываются существенными на следующих этапах — при построении теории возмущений и различных вариантов методов усреднения, при построении квантового аналога метода обратной задачи. Эти разделы остаются вне рамок настоящей статьи.

Целью настоящего обзора является изложение современной теории интегрируемых систем как составной части метода обратной задачи. Основной упор, как и в классической аналитической механике, делается на конечномерные системы.

Конечномерные динамические системы, к которым применим метод обратной задачи и которым, в основном, посвящена эта статья (а среди них содержатся все известные классические вполне интегрируемые системы), бывают конечномерными в своей исходной физической постановке, или возникают при построении специальных классов точных решений полевых уравнений как ограничения последних на конечномерные инвариантные подмногообразия.

Особо следует подчеркнуть значительно большую степень эффективности метода обратной задачи в сравнении с классическими методами интегрирования гамильтоновых систем. Для вполне интегрируемых систем, в отличие от неэффективной процедуры интегрирования, даваемой теоремой Лиувилля, метод обратной задачи позволяет явно предъявлять решения уравнений движения, равно как и канонические переменные действие-угол, в терминах специальных классов функций.

В первой главе обзора излагаются современные взгляды на гамильтонов формализм как конечномерных, так и полевых систем. Изложены также восходящие к классическим методы интегрирования гамильтоновых систем, обладающих явной симметрией или допускающих разделение переменных.

Вторая глава является ядром настоящего обзора. В ней вводится важнейшее понятие *коммутационного представления* эволюционных систем, которое является отправной точкой всех схем интегрирования, объединенных идеями метода обратной задачи. Наиболее плодотворной в теории интегрируемых конечномерных систем оказалась схема, основанная на применении методов классической алгебраической геометрии. Эта схема, а также ее многочисленные применения, излагаются во второй главе.

Необходимо отметить, что к настоящему обзору естественно примыкает обзор «Интегрируемые системы. II» А. М. Переломова, М. А. Ольшанецкого и М. А. Семенова-Тян-Шанского, публикуемый в одном из следующих томов данной серии. Его первая глава посвящена теоретико-групповым методам интегрирования некоторых специальных конечномерных систем. Вторая глава посвящена геометрическому квантованию разомкнутой цепочки Тода и ее обобщений.

Глава 1

ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

§ 1. Общее понятие скобки Пуассона. Важнейшие примеры

С современной точки зрения в основе гамильтонова формализма лежит понятие *скобки Пуассона* (S. D. Poisson). Пусть y^i, $i=1, \ldots, N$ — локальные координаты на многообразии Y — *фазовом пространстве*. Скобка Пуассона двух функций $f(y)$ и $g(y)$ задается тензорным полем $h^{ij}(y)$,

$$\{f, g\}=h^{ij}(y)\frac{\partial f}{\partial y^i}\frac{\partial g}{\partial y^j} \tag{1.1}$$

(здесь и далее суммирование по повторяющимся индексам подразумевается). При этом требуется выполнение таких свойств:

а) билинейность

$$\{\lambda f+\mu g, h\}=\lambda\{f, h\}+\mu\{g, h\},\quad \lambda,\ \mu=\text{const}, \tag{1.2}$$

и кососимметричность

$$\{g, f\} = -\{f, g\}; \tag{1.3}$$

б) *тождество Лейбница* (G. W. Leibnitz)

$$\{fg, h\} = g\{f, h\} + f\{g, h\}; \tag{1.4}$$

в) *тождество Якоби* (C. G. J. Jacobi)

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0. \tag{1.5}$$

Заметим, что

$$h^{ij}(y) = \{y^i, y^j\}, \tag{1.6}$$

и определение (1.1) записывается в виде

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g}{\partial y^j} \{y^i, y^j\}. \tag{1.7}$$

Гамильтоновы системы по определению имеют вид:

$$\dot{y}^i = \{y^i, H\}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.8}$$

где $H = H(y)$ — любая функция, называемая *гамильтонианом*. Векторное поле $\xi_H = (\xi_H^i)$, отвечающее гамильтоновой системе (1.8), имеет вид:

$$\xi_H^i(y) = h^{ij}(y) \frac{\partial H(y)}{\partial y^j} = \{y^i, H(y)\}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.9}$$

Такие *векторные поля* называются *гамильтоновыми*. Коммутатор гамильтоновых полей связан со скобкой Пуассона соотношением

$$[\xi_H, \xi_F] = -\xi_{\{H, F\}}. \tag{1.10}$$

Ясно, что производная любой функции $f = f(y)$ в силу гамильтоновой системы (1.8) имеет вид:

$$\dot{f} = \{f, H\} = \xi_H^i \frac{\partial f}{\partial y^i}. \tag{1.11}$$

Поток (18) сохраняет скобки Пуассона:

$$\{y^i(t), y^j(t)\} = \{y^i(0), y^j(0)\}. \tag{1.12}$$

(*Преобразования*, сохраняющие скобки Пуассона, называются *каноническими*. Любая однопараметрическая группа канонических преобразований для невырожденных скобок $\det(h^{ij}) \neq 0$ имеет вид (1.8), где гамильтониан, возможно, определен локально [42] (см. также 2-ую главу статьи В. И. Арнольда и А. Б. Гивенталя).)

Возможно имеются нетривиальные (быть может, заданные локально на многообразии) функции $f_q(y)$ такие, что

$$\{f_q, g\} = 0 \tag{1.13}$$

для любой функции $g(y)$. В этом случае скобка Пуассона называется вырожденной: матрица $h^{ij}(y)$ вырождена. (Для вырожденной матрицы $h^{ij}(y)$ постоянного ранга функции $f_q(y)$ (1.13) локально всегда существуют.) Если найдены все такие величины $f_l(y)$, то на их общей поверхности уровня

$$f_l(y)=\text{const} \quad (l=1,\,2,\ldots) \tag{1.14}$$

скобка Пуассона уже становится невырожденной.

Пусть z^q — координаты на поверхности уровня (1.14). Ограничение тензора h^{qr} на эту поверхность уже невырождено, и имеется обратная матрица

$$h_{qp}h^{pr}=\delta_q{}^r. \tag{1.15}$$

Обратная матрица определяет 2-форму

$$\Omega=h_{qp}(z)\,dz^q\wedge dz^p. \tag{1.16}$$

Из свойства (1.5) вытекает, что форма Ω замкнута,

$$d\Omega=0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial h_{qp}}{\partial z^r}+\frac{\partial h_{rq}}{\partial z^p}+\frac{\partial h_{pr}}{\partial z^q}=0. \tag{1.17}$$

Если скобка Пуассона с самого начала была невырожденной, то условие замкнутости (1.17) оказывается равносильным тождеству Якоби (1.5) [42]. Таким образом, фазовые пространства с невырожденной скобкой Пуассона являются *симплектическими многообразиями.*

Рассмотрим основные типы фазовых пространств.

Тип I. Постоянные скобки и лагранжевы вариационные задачи. Пусть матрица h^{ij} постоянна и кососимметрична. Тождество Якоби в этом случае выполняется автоматически: на плоскости, где матрица h^{qr} делается невырожденной, соответствующая ей 2-форма $\Omega=h_{qr}dy^q\vee dy^r$ имеет постоянные коэффициенты и поэтому замкнута. Линейным преобразованием постоянные скобки приводятся к виду

$$(h^{ij})=\begin{pmatrix} \begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix} & & & & 0\\ & \ddots & & & \\ & & \begin{matrix}0&1\\-1&0\end{matrix} & & \\ 0 & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0\end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

Локально к такому виду можно привести любые скобки Пуассона постоянного ранга (теорема Дарбу (G. Darboux)). В невырожденном случае вводятся координаты $(y)=(x^1,\ldots,x^n,$ $p_1,\ldots,p_n)$ такие, что

$$h^{ij} = -h_{ij} = \begin{pmatrix} & & & 1 & 0 \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ -1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & 0 \\ 0 & -1 & & & \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

Координаты (x, p) называются каноническими.

Уравнения (1.8) принимают вид:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.20}$$

Это — канонические уравнения Гамильтона (W. R. Hamilton). Они получаются из вариационного принципа $\delta S = 0$, где

$$S = \int L(x, \dot{x})\, dt, \tag{1.21}$$

(x) — конфигурационное пространство, $L(x, \dot{x})$ — лагранжиан, если сделать *преобразование Лежандра* (A. M. Legendre)

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.22}$$
$$H(x, p) = p_i \dot{x}^i - L(x, \dot{x})$$

(предполагается, что уравнения $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ можно решить в виде $\dot{x}^i = \dot{x}^i(x, p)$).

Обратно, если $H(x, p)$ — гамильтониан, то мы имеем лагранжиан $L(x, \dot{x})$, определяемый из уравнений

$$\dot{x}^i = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p_i}, \quad L(x, \dot{x}) = p_i \dot{x}^i - H(x, p). \tag{1.23}$$

Предполагается, что уравнения $\dot{x}^i = \partial H / \partial p_i$ можно решить относительно переменных p_i.

К виду (1.20) приводятся такие вариационные задачи с высшими производными [42]

$$\delta S = 0, \quad S = \int L(x, \dot{x}, \ldots, x^{(k)})\, dt \tag{1.24}$$

при помощи *преобразования М. В. Остроградского*

$$q^i = x^{(i-1)}, \quad p_i = \sum_{s=0}^{k=i} (-1)^s \frac{d^s}{dt^s} \frac{\partial L}{\partial x^{(i+s)}}, \quad i = 1, \ldots, k; \tag{1.25}$$

$$-H(q, p) = L - p_1 q^2 - \ldots - p_{k-1} q^k - p_k x^{(k)}, \tag{1.26}$$
$$\dot{q}^i = \partial H / \partial p_i, \quad \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i, \quad i = 1, \ldots, k,$$

если уравнения (1.25) однозначно разрешаются в виде

$$x = x(q, p), \quad \dot{x} = \dot{x}(q, p), \ \ldots, \ x^{(2k-1)} = x^{(2k-1)}(q, p). \tag{1.27}$$

Тип II. *Скобки Ли—Пуассона.* Рассмотрим теперь второй по сложности случай, когда тензор h^{ij} не является константой, но линейно зависит от координат (y)[1])

$$h^{ij}=c_k^{ij}y^k, \quad c_k^{ij}=\mathrm{const}. \tag{1.28}$$

Рассмотрим совокупность L всех линейных функций на фазовом пространстве, которое мы обозначим через L^*. Для базисных линейных форм—координат y^i — скобка определяет операцию «коммутирования»

$$[y^i, y^j]=c_k^{ij}y^k=\{y^i, y^j\}. \tag{1.29}$$

Из требований (1.3), (1.5) вытекает, что операция (1.29) превращает линейное пространство L в алгебру Ли (S. Lie), сопряженное пространство L^* которой является фазовым для скобки Пуассона (1.28). Скобка этого вида впервые рассматривалась Ли [127]. Она была переоткрыта Ф. А. Березиным [6] и использовалась А. А. Кирилловым и Костантом (B. Kostant) [118] (на менее удобном языке симплектических многообразий) в теории бесконечномерных представлений групп Ли. Скобка (1.28), вообще говоря, вырождена.

Пример 1. Основным примером гамильтонова формализма типа 1 является фазовое пространство T^*M — пространство ковекторов (с нижними индексами) на многообразии M (конфигурационном пространстве). В T^*M имеются локальные координаты x^i (в M) и сопряженные импульсы p_j (в слое) со скобками Пуассона

$$\{x^i, x^j\}=\{p_i, p_j\}=0, \quad \{x^i, p_j\}=\delta_j^i \tag{1.30}$$

и формой

$$\Omega=dp_i\wedge dx^i. \tag{1.31}$$

Пример 2. Полезно рассмотреть также скобку Пуассона вида (1.30), дополнительно искаженную «внешним полем» $F_{ij}=$ $=-F_{ji}(x)$,

$$\{x^i, x^j\}=0, \quad \{x^i, p_j\}=\delta_j^i, \quad \{p_i, p_j\}=F_{ij}(x), \tag{1.32}$$

где 2-форма $F=F_{ij}dx^i\wedge dx^j$ замкнута, $dF=0$. Соответствующая 2-форма Ω имеет вид:

$$\Omega=dp_i\wedge dx^i+F_{ij}dx^i\wedge dx^j. \tag{1.33}$$

Уравнения движения с гамильтонианом $H(x, p)$ и скобкой Пуассона (1.32) представляют собой (для $n=2, 3$) уравнения движения заряженной частицы во внешнем магнитном поле ($n=2$, 3) F_{ij} (или электромагнитном для $n=4$). В области, где $F=dA$, скобка (1.32) приводится к стандартному виду (1.30). К виду (1.32), как правило, приводятся (глобально) невырожденные скобки Пуассона на пространстве T^*M, удовлетворяющие та-

---

1) Третий по сложности случай, когда тензор $h^{ij}(y)$ квадратично зависит от y, также весьма интересен и недавно начал изучаться [86].

кому требованию: любые функции f, g на базе M (не зависящие от переменных на слое, состоящем из всех ковекторов) имеют нулевую скобку Пуассона: $\{f, g\}=0$ (см. [78]).

Перейдем теперь к примерам, связанным со скобками Ли—Пуассона.

Пример 3. Пусть L есть алгебра Ли группы вращений SO(3). Метрика Киллинга (W. Killing) на L является евклидовой и позволяет не различать L и L^* (все индексы считаются нижними). Скобка Пуассона базисных функций M_i на L^* имеет вид:

$$\{M_i, M_j\}=\varepsilon_{ijk}M_k, \tag{1.34}$$

где

$$\varepsilon_{ijk}=c_k^{ij}\begin{cases}= \text{знак перестановки } (i, j, k), \text{ если все } i, j, k \\ \quad \text{различны,} \\ =0, \text{ если есть пара совпадающих индексов } i, j, k.\end{cases} \tag{1.35}$$

Функция $M^2=\sum M_i^2$ такова, что

$$\{M^2, M_i\}=0, \quad i=1, 2, 3. \tag{1.36}$$

На поверхностях уровня $M^2=\text{const}$ (сферы) скобка (1.34) делается невырожденной. Гамильтоновы системы на L^* имеют вид:

$$\dot{M}_i=\{M_i, H(M)\}. \tag{1.37}$$

Пусть $\omega^i=\partial H/\partial M$; метрика Киллинга позволяет не различать верхних и нижних индексов. Уравнения (1.37) сведутся к виду *«уравнений Эйлера»* (L. Euler)

$$\dot{M}=[M, \omega], \tag{1.38}$$

где квадратные скобки обозначают коммутатор в L. (При $H=\frac{1}{2}(a_1M_1^2+a_2M_2^2+a_3M_3^2)$ уравнения (1.37) совпадают с уравнениями движения твердого тела, закрепленного в центре тяжести.) Вывод уравнений (1.38) верен для всех компактных (и полупростых) групп Ли, на которых имеется метрика Киллинга — евклидова (псевдоевклидова) метрика на алгебре Ли, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов

$$L\to gLg^{-1}, \tag{1.39}$$

где g — элемент из группы Ли, а L — алгебра Ли. Такие системы на группах SO(N) называются, согласно В. И. Арнольду, «многомерным аналогом твердого тела», если гамильтониан имеет вид квадратичной формы на пространстве кососимметрических матриц $M=(M_{ij})$, где

$$H(M)=\sum_{i<j}d_{ij}M_{ij}^2, \quad d_{ij}=q_i+q_j, \quad q_i>0. \tag{1.40}$$

Пример 4. С алгеброй Ли L группы $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства связаны важные системы, возникшие в гидродинамике. Эта алгебра уже не является полупростой. На фазовом пространстве L^* имеется 6 координат $\{M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3\}$ и скобки Пуассона

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k, \quad \{M_i, p_j\} = \varepsilon_{ijk} p_k, \quad \{p_i, p_j\} = 0. \qquad (1.41)$$

Скобка (1.41) обладает двумя независимыми функциями $f_1 = \sum p_i^2$, $f_2 = \sum p_i M_i$ такими, что

$$\{f_q, M_i\} = \{f_q, p_i\} = 0, \quad q = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (1.42)$$

На поверхностях уровня $f_1 = p^2$, $f_2 = ps$ скобка (1.41) невырождена. Замена $\sigma_i = M_i - \frac{s}{p} p_i$ устанавливает изоморфизм этих поверхностей уровня с касательным расслоением T^*S^2 к сфере, $\sum \sigma_i p_i = 0$. На этих поверхностях уровня ограничение скобки Пуассона (1.41) уже невырождено (при $p \neq 0$). Оказывается, возникающие на T^*S^2 скобки глобально приводятся к виду (1.32). Соответствующая замена (см. [78]) имеет вид:

$$p_1 = p\cos\theta\cos\psi, \quad p_2 = p\cos\theta\sin\psi, \quad p_3 = p\sin\theta,$$
$$\sigma_1 = p_\psi \operatorname{tg}\theta\cos\psi - p_\theta\sin\psi, \quad \sigma_2 = p_\psi \operatorname{tg}\theta\sin\psi + p_\theta\cos\psi, \qquad (1.43)$$
$$\sigma_3 = -p_\psi,$$

где $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$, $\sigma_i = M_i - sp^{-1}p_i$. Легко вывести из формул (1.43), что

$$\{\theta, \psi\} = \{p_\theta, \psi\} = \{p_\psi, \theta\} = 0, \quad \{\theta, p_\theta\} = \{\psi, p_\psi\} = 1,$$
$$\{p_\theta, p_\psi\} = s\cos\theta. \qquad (1.44)$$

Соответствующая 2-форма Ω приобретает вид (1.33),

$$\Omega = dp_\theta \wedge d\theta + dp_\psi \wedge d\psi + s\cos\theta d\theta \wedge d\psi = d\xi_i \wedge dy^i + F, \qquad (1.45)$$

где $y^1 = \theta$, $y^2 = \psi$, $\xi_1 = p_\theta$, $\xi_2 = p_\psi$, $F = s\cos\theta d\theta \wedge d\psi$. Интеграл от формы F (и Ω) по базисному циклу $[S^2] \in H_2(T^*S^2) = Z$ имеет вид:

$$\iint_{S^2} F = \iint_{[S^2]} \Omega = 4\pi s = 4\pi f_2 f_1^{-1/2}. \qquad (1.46)$$

Таким образом, мы получаем стандартную скобку Пуассона на T^*S^2, дополнительно искаженную эффективным магнитным полем F. При $s \neq 0$ эффективное магнитное поле всегда отлично от нуля и представляет собой «монополь Дирака» (неквантованный).

Пусть $H(M, p)$ — гамильтониан. Введем обозначения $u^i = \partial H / \partial p_i$, $\omega^i = \partial H / \partial M_i$. Гамильтоновы уравнения приобретут вид *«уравнений Кирхгофа»* (P. Kirchhoff)

$$\dot{p}=[p, \omega], \quad \dot{M}=[M, \omega]+[p, u] \qquad (1.47)$$

(квадратные скобки обозначают векторное произведение). Уравнения (1.47) совпадают (для квадратичных гамильтонианов $H(M, p)$) с уравнениями Кирхгофа для движения твердого тела в жидкости — идеальной, несжимаемой и покоящейся на бесконечности [133]. Движение самой жидкости считается потенциальным. В этом случае H — энергия, M и p — полный момент и импульс системы тело — жидкость в подвижной системе координат, жестко связанной с телом. Энергия $H(M, p)$, квадратичная по M, p и положительно определенная, может быть задана в виде

$$2H=\sum a_iM_i^2+\sum b_{ij}(p_iM_j+M_ip_j)+\sum c_{ij}p_ip_j. \qquad (1.48)$$

К виду (1.47) приводятся уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой в осесимметричном силовом поле с потенциалом $W(z)$. Соответствующий гамильтониан имеет вид:

$$H=\frac{1}{2}\sum a_iM_i^2+W(l^ip_i), \qquad (1.49)$$

где l^i — постоянный вектор, задающий положение центра масс относительно осей инерции и точки закрепления. Величины p_i здесь безразмерны и не имеют физического смысла импульсов. Это — направляющие косинусы единичного вектора, т. е. всегда $f_1=p^2=1$. К виду (1.47) приводятся также уравнения динамики спина в A-фазе сверхтекучего ^{3}He (см. [78]).

На поверхности $f_1=p^2$, $f_2=ps$ гамильтонианы H вида (1.48) или (1.49) в переменных (y, ξ) записываются так:

$$H=\frac{1}{2}g^{ab}(y)\xi_a\xi_b+A^a(y)\xi_a+V(y). \qquad (1.50)$$

Здесь для гамильтониана (1.48) будем иметь

$$\sum a_i\sigma_i^2=g^{ab}\xi_a\xi_b, \quad \sigma_i=M_i-sp^{-1}p_i, \qquad (1.51)$$

$$A^a\xi_a=s\left(\sum a_ip_ip^{-1}\sigma_i\right)+p\sum b_{ij}(\sigma_ip_jp^{-1}+\sigma_jp_ip^{-1}), \qquad (1.52)$$

$$2V=s^2\sum a_ip_i^2p^{-2}+2ps\sum b_{ij}p_ip_jp^{-2}+p^2\sum c_{ij}p_ip_jp^{-2}. \qquad (1.53)$$

Гамильтониан H ввиду однородности зависит только от sp^{-1}. Для волчка (1.49) гамильтониан на поверхности уровня $f_1=1$, $f_2=s$ также запишется в виде (1.50), где метрика g^{ab} снова имеет вид (1.51), а

$$A^a\xi_a=s\sum a_i\sigma_ip_i, \qquad (1.54)$$

$$2V=s^2\sum a_ip_i^2+2W(l^ip_i). \qquad (1.55)$$

Вывод ([78]). Уравнения типа Кирхгофа сводятся к системе, математически эквивалентной классической заряженной частице, движущейся по сфере S^2 с римановой метрикой $g_{ab}(y)$, $g^{ab}g_{bc}=\delta_c{}^a$, в потенциальном поле $U(y)$,

$$U(y)=V(y)-\frac{1}{2}g_{ab}A^aA^b, \tag{1.56}$$

а также в эффективном магнитном поле $\tilde{F}_{ab}(y)$,

$$\tilde{F}_{12}=s\cos\theta-\partial_1A_2+\partial_2A_1,\quad A_a=g_{ab}A^b,\quad s=f_2f_1^{-1/2}. \tag{1.57}$$

Форма $A_a dy^a$ глобально определена на сферу S^2, потому

$$\iint\limits_{S^2}\tilde{F}_{12}d\theta\wedge d\psi=\iint\limits_{S^2}F=4\pi s \tag{1.58}$$

в силу (1.46).

Замечание. Недавно стало ясно, что на SO(4) возникают системы, описывающие в некоторых случаях движение твердого тела с полостями, заполненными жидкостью. Интегрируемые случаи здесь были найдены В. А. Стекловым [139] и переоткрыты в ряде современных работ (см., например, [10], [18]).

Ряд других применений уравнений Эйлера на алгебрах Ли в задачах математической физики был найден в самое последнее время О. И. Богоявленским вместе с интегрируемыми случаями в этих задачах (см. [11]).

Рассмотрим теперь бесконечномерные примеры фазовых пространств — пространств полей $u=(u^1(x),\ldots,u^n(x))$ какого-то типа, где $x=(x^1,\ldots,x^m)$ является одним из индексов в формулах. Скобка Пуассона задается матрицей

$$\{u^i(x),\ u^j(y)\}=h^{ij}(x,\ y) \tag{1.59}$$

из функций $h^{ij}(x,y)$ (обобщенных), зависящих, вообще говоря, от полей. Для двух «функций» (функционалов) $F[u]$, $G[u]$ скобка Пуассона вычисляется по формуле

$$\{F,\ G\}=\iint\frac{\delta F}{\delta u^i(x)}h^{ij}(x,\ y)\frac{\delta G}{\delta u^j(y)}d^mxd^my. \tag{1.60}$$

Здесь $\delta F/\delta u^i(x)$ — вариационные производные, определяемые равенствами

$$\delta F=\int\frac{\delta F}{\delta u^i(x)}\delta u^i(x)\,d^mx. \tag{1.61}$$

Пример 1. *Локальные полевые скобки* лагранжевых вариационных задач. Имеется два набора полей $u=(q^1(x),\ldots$ $\ldots,q^n(x),\ p_1(x),\ldots,p_n(x))$ с попарными скобками Пуассона вида

$$\begin{gathered}\{q^i(x),\ q^j(y)\}=\{p_i(x),\ p_j(y)\}=0,\\ \{q^i(x),\ p_j(y)\}=\delta_j^i\delta(x-y),\ i,\ j=1,\ldots,n.\end{gathered} \tag{1.62}$$

Скобка Пуассона двух функционалов F и G имеет вид:

$$\{F, G\}=\int\left[\frac{\delta F}{\delta q^i(x)}\frac{\delta G}{\delta p_i(x)}-\frac{\delta F}{\delta p_i(x)}\frac{\delta G}{\delta q^i(x)}\right]d^m x. \tag{1.63}$$

Уравнения Гамильтона записываются в виде

$$\begin{aligned}\dot{q}^i(x)&=\{q^i(x), \mathscr{H}\}=\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta p_i(x)},\\ \dot{p}_i(x)&=\{p_i(x), \mathscr{H}\}=-\frac{\delta\mathscr{H}}{\delta q^i(x)},\end{aligned} \tag{1.64}$$

где $\mathscr{H}=\mathscr{H}[p, q]$ — гамильтониан. Они возникают, в частности, из полевого вариационного принципа

$$\frac{\delta S}{\delta q^i}\equiv\frac{\partial\Lambda}{\partial q^i}-\partial_x\frac{\partial\Lambda}{\partial q_x{}^i}-\partial_t\frac{\partial\Lambda}{\partial q_t{}^i}=0, \quad i=1, \ldots, n, \tag{1.65}$$

$$S=\int dt\int d^m x\Lambda(q, q_x, q_t), \tag{1.66}$$

где $\Lambda(q, q_x, q_t)$ — плотность лагранжиана, при помощи полевого варианта преобразования Лежандра

$$p_i=\frac{\partial\Lambda}{\partial q_t{}^i}, \quad \mathscr{H}=\int d^m x\,(p_i(x)\,q_t{}^i(x)-\Lambda) \tag{1.67}$$

(предполагается, как и выше в конечномерном случае, что уравнения $p_i=\partial\Lambda(q, q_x, q_t)/\partial q_t{}^i$ решаются относительно $q_t{}^i$).

Можно также рассмотреть по аналогии с конечномерным случаем искажение скобок (1.62) «магнитным полем» — замкнутой 2-формой на пространстве полей $q(x)$. Разберем пример, связанный с включением «внешних полей» в теории *киральных полей*. Как известно (см., например, [44]), определение нелинейного кирального поля таково: имеются произвольные римановы многообразия N^q и M^n; пусть на отображениях $f: N^q\to M^n$ определен функционал $S_0(f)$. Функционал $S_0(f)$ имеет вид функционала Дирихле, квадратичного по производным отображения f, возможно, с какими-то добавками. Так, стандартный «киральный лагранжиан» для главного кирального поля, где $M^n=G$ — группа Ли с двусторонне инвариантной метрикой, имеет вид:

$$S_0(f)=\frac{1}{2}\int_{N^q}\mathrm{Sp}\,(g^{\mu\nu}A_\mu A_\nu)\sqrt{g}d^q y, \tag{1.68}$$

где $g_{\mu\nu}$ — метрика N^q, $A_\mu=f^{-1}(y)\,\partial f(y)/\partial y^\mu$.

Если многообразие N^q представлено в виде произведения $N^q=P^{q-1}\times R$, где R — ось времени t, $y=(x, t)$ (например, N^q есть пространство Минковского $N^q=R^{q-1,1}$), то уравнения Эйлера—Лагранжа для действия (1.68) приводятся к гамильтонову виду преобразованием Лежандра (1.67), $q(x)=f(x)$.

Определим теперь процедуру включения внешнего поля. Отметим предварительно, что любая дифференциальная форма ω степени $q+r$ на многообразии M^n определяет дифференциальную r-форму Ω_r на пространстве отображений $\{N^q \xrightarrow{f} M^n\}$ по формуле

$$\Omega_r(\delta_1 f, \ldots, \delta_r f)|_f = \int\limits_{N^q} f^*(i_{\xi_1} \ldots i_{\xi_r}\omega), \tag{1.69}$$

где

$$\xi_k(y) = \delta_k f(y), \quad k = 1, \ldots, r - \tag{1.70}$$

«касательные векторы» к пространству отображений (векторные поля на M^n в точках $f(y)$), $i_\xi\omega$ — свертка формы $\omega = (\omega_{i_1 \ldots i_{q+r}})$ с вектором $\xi = (\xi^i)$,

$$(i_\xi\omega)_{i_2 \ldots i_{q+r}} = \xi^i \omega_{i i_2 \ldots i_{q+r}}. \tag{1.71}$$

Если форма ω замкнута, $d\omega = 0$, то и форма Ω_r на бесконечномерном пространстве отображений замкнута [78].

Пусть на M^n фиксирована замкнутая $(q+1)$-форма ω («внешнее поле»). Тогда она определяет замкнутую 1-форму Ω_1 на пространстве отображений $N^q \xrightarrow{f} M^n$ по схеме, приведенной выше. Замкнутая 1-форма

$$\delta S = \delta S_0 + \Omega_1, \tag{1.72}$$

где функционал S_0 типа (1.68), определяет так называемый «*многозначный функционал*» S кирального поля f во внешнем поле ω [78]. Экстремали этого функционала определяются, как обычно, из уравнений Эйлера—Лагранжа (L. Euler—J. L. Lagrange)

$$\delta S = 0. \tag{1.73}$$

Оказывается, что при $N_y{}^q = P_x^{q-1} \times R_t$ включение внешнего поля эквивалентно искажению скобок Пуассона «магнитным полем» F — замкнутой 2-формой на пространстве полей $\{P^{q-1} \xrightarrow{f} M^n\}$ без изменения гамильтониана. Эта 2-форма $F = \Omega_2$ определяется по схеме (1.69) с заменой N^q на P^{q-1}.

Пример 2. Более общо, полевые скобки (1.59) называются локальными, если обобщенные функции $h^{ij}(x, y)$ представляются в виде конечных сумм дельта-функции $\delta(x-y)$ и ее производных с коэффициентами, зависящими от значений полевых переменных и их производных в точках x, y. Для этих скобок и локальных гамильтонианов вида

$$\mathscr{H} = \int h(u, u_x, \ldots, u^{(s)})\, d^m x \tag{1.74}$$

гамильтоновы уравнения $\dot{u} = \{u, \mathscr{H}\}$ записываются в виде уравнений в частных производных.

Важный пример. Случай $m=1$, $n=1$. Здесь имеется скобка (Гарднера (C. Gardner) — В. Е. Захарова — Л. Д. Фаддеева), возникшая в теории *уравнения Кортевега—де Фриза* (D. J. Korteweg—G. de Vries) (КдФ)

$$\{u(x),\ u(y)\}=\delta'(x-y). \tag{1.75}$$

Скобка Пуассона двух функционалов имеет вид:

$$\{f,\ G\}=\int \frac{\delta F}{\delta u(x)} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx. \tag{1.76}$$

Кососимметричность скобки (1.75), (1.76) очевидна; справедливость тождества Якоби вытекает из того, что «тензор» h^{ij} здесь постоянный (не зависит от полевых переменных). Скобка (1.75) вырождена; функционал $I_{-1}=\int u dx$ имеет нулевую скобку с любым другим функционалом F:

$$\{F,\ I_{-1}\}=0. \tag{1.77}$$

На подпространстве $I_{-1}=\int u dx=c$ (например, $c=0$) скобка (1.75), (1.76) уже невырождена. Само уравнение КдФ задается гамильтонианом

$$I_1=\mathscr{H}=\int\left(\frac{u_x^2}{2}+u^3\right) dx, \tag{1.78}$$

$$u_t=\frac{\partial}{\partial x} \frac{\delta \mathscr{H}}{\delta u(x)}=6uu_x-u_{xxx}. \tag{1.79}$$

Величина

$$I_0=\int \frac{u^2}{2} dx, \quad \{u(x),\ I_0\}=u_x(x), \tag{1.80}$$

играет роль импульса (генератора трансляций по x). Любопытно, что одним из проявлений интегрируемости уравнения КдФ (методом обратной задачи, см. ниже гл. 2) является наличие еще одной локальной скобки [128] вида

$$\{F,\ G\}=\int \frac{\delta F}{\delta u(x)} A \frac{\delta G}{\delta u(x)} dx,$$
$$A=-\frac{d^3}{dx^3}+2\left(u \frac{d}{dx}+\frac{d}{dx} u\right). \tag{1.81}$$

Имеется даже семейство скобок: оператор A можно заменить на $A+\lambda \frac{d}{dx}$ (λ — произвольная константа). Само КдФ в новой гамильтоновой структуре имеет вид:

$$u_t=A \frac{\delta I_0}{\delta u(x)}. \tag{1.82}$$

Пример 3. Рассмотрим теперь континуальные примеры скобок Ли—Пуассона, связанных с бесконечномерными алгебрами Ли L. Отправной точкой для дальнейших построений будет служить алгебра Ли L векторных полей в m-мерном пространстве. Коммутатор полей $v^i(x)$, $w^i(x)$ имеет вид:

$$[v, w]^i(x) = v^j(x)\frac{\partial w^i(x)}{\partial x^j} - w^j(x)\frac{\partial v^i(x)}{\partial x^j}. \qquad (1.83)$$

Роль индекса играют здесь пары (x, i) — точка x и индекс i. Операцию (1.83) следует записать через «структурные константы» в виде

$$[v, w]^i(x) = \int d^m y d^m z c^i_{jk}(x, y, z) v^j(y) w^k(z). \qquad (1.84)$$

Сопоставляя (1.83) и (1.84), получаем

$$c^i_{jk}(x, y, z) = \delta_j{}^i \delta(z-x)\partial^{(y)}_k \delta(y-z) - \\ - \delta_k{}^i \delta(y-x)\partial^{(z)}_j \delta(z-y), \qquad (1.85)$$

$$\partial^{(x)}_j = \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \int f(z)\partial^{(z)}_j \delta(z-x) d^m z = -\frac{\partial f(x)}{\partial x^j}. \qquad (1.86)$$

Сопряженные к компонентам скорости переменные $p_i(x)$ на пространстве L^*, дуальном к векторным полям $v^i(x)$, должны быть таковы, что величина

$$\int p_i(x) v^i(x) d^m x \qquad (1.87)$$

является скалярной по отношению к заменам переменных. Это значит, что переменные $p_i(x)$ — это плотности ковекторов, которые при заменах переменных дополнительно умножаются на якобиан (мы будем их называть плотностями импульсов). Согласно (1.85), скобка Пуассона имеет вид:

$$\{p_j(y), p_k(z)\} = \int c^i_{jk}(x, y, z) p_i(x) d^m x = \\ = p_k(y)\partial^{(y)}_j \delta(y-z) - p_j(z)\partial^{(z)}_k \delta(z-y). \qquad (1.88)$$

В важном частном случае $m=1$ получаем

$$\{p(y), p(z)\} = p(y)\delta'(y-z) - p(z)\delta'(z-y). \qquad (1.89)$$

Замена $p=u^2$ приводит эту скобку к скобке (1.75).

В алгебре L векторных полей в евклидовом пространстве (где отмечена евклидова метрика и элемент объема — плотность массы, которая считается постоянной) задается подалгебра L_0 бездивергентных полей

$$\partial_i v^i = 0. \qquad (1.90)$$

Сопряженное пространство $L_0{}^*$ получается факторизацией по градиентам

$$L_0{}^* = L^*/(\partial_i \varphi). \qquad (1.91)$$

Другими словами, плотности импульсов $p_i(x)$ дают тривиальные линейные формы на L_0, если $p_i(x) = \partial_i \varphi(x)$:

$$\int p_i v^i d^m x = \int v^i \partial_i \varphi d^m x = -\int \varphi \partial_i v^i d^m x = 0. \qquad (1.92)$$

Уравнение Эйлера гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости как гамильтонова система записываются [1], [78] на пространстве L_0^* с гамильтонианом

$$H = \int \frac{\rho v^2}{2} d^m x, \quad \rho = \mathrm{const}, \quad \partial_i v^i = 0, \quad p_i = \rho v^i \qquad (1.93)$$

и скобками Пуассона (1.88). Эти уравнения всегда пишут на полном пространстве L^*, эквивалентном пространству скоростей в данном случае

$$\begin{cases} \rho v_t^i = \{p_i, H\} + \partial_i p, \\ \partial_i v^i = 0. \end{cases} \qquad (1.94)$$

Слагаемые $\partial_i p$ возникли из-за перехода от L_0^* к пространству L^*, где величины вида $\partial_i p$ эквивалентны нулю. Давление p определено здесь только с точностью до константы. Скобка Пуассона на пространстве L_0^* может быть записана в виде

$$\{v_i(x), v_j(y)\} = \frac{1}{\rho} (\partial_i v_j - \partial_j v_i) \delta(x-y),$$
$$p_i = \rho v_i, \quad \rho = \mathrm{const}. \qquad (1.95)$$

Гамильтонов формализм для идеальной сжимаемой жидкости невозможно реализовать на алгебре L, он представляет собой частный случай гамильтонова формализма для жидкостей с внутренними степенями свободы. Уже обычная сжимаемая жидкость обладает такими внутренними степенями свободы — плотностью массы ρ и плотностью энтропии s, для включения которых требуется расширение алгебры Ли L векторных полей. Кроме векторных полей v^i, мы добавим еще пару полей v^ρ и v^s с коммутаторами вида

$$[(v, v^\rho, v^s), (w, w^\rho, w^s)] =$$
$$= ([v, w], v^i \partial_i w^\rho - w^i \partial_i v^\rho, v^i \partial_i w^s - w^i \partial_i v^s). \qquad (1.96)$$

Алгебру (1.96) мы обозначим через $L_{\rho,s}$. Соответствующие переменные в сопряженном пространстве $L^*_{\rho,s}$ мы обозначим через ρ (плотность массы) и s (плотность энтропии). Скобки Пуассона в $L^*_{\rho,s}$ имеют вид:

$$\{p_i(x), \rho(y)\} = \rho(x) \partial_i \delta(y-x),$$
$$\{p_i(x), s(y)\} = s(x) \partial_i \delta(y-x),$$
$$\{\rho(x), \rho(y)\} = \{s(x), s(y)\} = \{\rho(x), s(y)\} = 0, \qquad (1.97)$$
$$\{v_i(x), v_j(y)\} = \frac{1}{\rho} (\partial_j v_i - \partial_i v_j) \delta(x-y)$$

(скорости — это здесь ковекторы $v_i = p_i \rho^{-1}$). Гамильтониан $H = \int \left[\frac{p^2}{2\rho} + \varepsilon(\rho, s) \right] d^m x$ — это энергия. Величины $M = \int \rho d^m x$ и $S = \int s d^m x$ имеют нулевые скобки Пуассона (тривиальные законы сохранения). По существу скобки Пуассона (1.97) были подобраны так, чтобы масса и энтропия переносились вместе с частицами, в отличие от энергии, которая сохраняется только интегрально. Другие примеры скобок Ли—Пуассона, возникающих в гидродинамике, можно найти в [78].

Пример 4. Общие *скобки гидродинамического типа*. Рассмотренные в предыдущем примере скобки Пуассона и гамильтонианы обладают следующими свойствами:

1) Гамильтонианы имеют вид:

$$H = \int h(u)\, d^m x, \tag{1.98}$$

где плотности $h(u)$ зависят только от полей $u = (u^1, \ldots, u^n)$, а не от их производных.

2) Гамильтоновы уравнения

$$u_t^i(x) = \{u^i(x), H\} \tag{1.99}$$

являются квазилинейными уравнениями первого порядка

$$u_t^i = v_j^i(u)\, u_x^j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.100}$$

Наиболее общий вид скобок Пуассона, приводящих к уравнениям (1.100) для гамильтонианов (1.98), таков:

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij\alpha}(u(x)) \frac{\partial \delta(x-y)}{\partial y^\alpha} + \\ + b_k^{ij\alpha}(u(x)) \frac{\partial u^k(x)}{\partial x^\alpha} \delta(x-y). \tag{1.101}$$

Вид уравнений (1.100), гамильтонианов (1.98) и скобок (1.101) инвариантен относительно локальных замен полевых переменных

$$u = u(w). \tag{1.102}$$

Рассмотрим здесь одномерный случай $m = 1$:

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\, \delta_y(x-y) + \\ + b_k^{ij}(u(x))\, u_x^k(x)\, \delta(x-y). \tag{1.103}$$

В этом случае симметрическая матрица $g^{ij}(u) = g^{ji}(u)$ при заменах (1.102) ведет себя как метрика (с верхними индексами) на пространстве полей u. Если она невырождена, то величины Γ_{jk}^i, определяемые равенствами

$$b_k^{ij} = -g^{is} \Gamma_{sk}^j, \tag{1.104}$$

преобразуются при заменах (1.102) как символы Кристоффеля (см. [39]). Оказывается [39], выражение (1.103) задает скобку

Пуассона, если и только если связность Γ_{jk}^{i} симметрична, согласована с метрикой q^{ij} и имеет нулевую кривизну. Это означает, что локальными заменами (1.102) метрика g^{ij} приводится к евклидовой (или псевдоевклидовой), связность к нулевой, а скобка (1.103), тем самым, к постоянной:

$$\{w^i(x),\ w^j(y)\} = \pm\delta^{ij}\delta'(x-y). \tag{1.105}$$

Следует отметить, что естественные «физические» переменные u^i, в которых возникают уравнения (1.100) и скобки (1.103), существенно «криволинейны», т. е. метрика $g^{ij}(u)$ в координатах u^i нетривиальна.

В многомерном случае $m>1$ фактически возникает семейство метрик $g^{ij\alpha}$, $\alpha=1, \ldots, m$. Если они невырождены, то связности $\Gamma_{jk}^{i\alpha}$, где $b_k^{ij\alpha}=-g^{is\alpha}\Gamma_{sk}^{j\alpha}$, согласованы с этими метриками, симметричны и имеют нулевую кривизну. Однако все метрики $g^{ij\alpha}$ не приводятся, как правило, к постоянному виду единым преобразованием. Препятствием для такого приведения служат тензоры $T^{ijk\alpha\beta}=b_l^{ij\alpha}g^{lk\beta}-b_l^{kj\beta}g^{li\alpha}$. Например, для скобок (1.88) при $m>1$ такое приведение невозможно. Отметим также, что при $m>2$ метрики $g^{ij\alpha}=p_s(\delta^{is}\delta^{j\alpha}+\delta^{js}\delta^{i\alpha})$, отвечающие скобкам (1.88), всегда вырождены. Условия, при которых выражение (1.101) задает скобку Пуассона, для невырожденных метрик $g^{ij\alpha}$ записываются в виде набора соотношений на тензоры $T^{ijk\alpha\beta}$, которые мы здесь обсуждать не будем (см. [40]).

§ 2. Интегралы и понижение порядка гамильтоновых систем. Системы с симметриями

Функция $F(y)$ называется *интегралом гамильтоновой системы* (1.8), если ее скобка с гамильтонианом $H(y)$ равна нулю:

$$\{F,\ H\}=0. \tag{1.106}$$

Учитывая (1.11), получаем: величина F сохраняется вдоль траекторий гамильтоновой системы (1.8). В частности, сам гамильтониан H (если он не зависит от времени) всегда является сохраняющейся величиной. Траектории системы (1.8) целиком лежат на поверхности уровня $F=\mathrm{const}$. Если скобка Пуассона вырождена, то всегда имеются «тривиальные» интегралы (1.13), коммутирующие с любым гамильтонианом. Пример редукции гамильтонова формализма при помощи тривиальных интегралов мы рассматривали в § 1 в связи с уравнениями типа Кирхгофа. Гамильтоновы системы с одной степенью свободы ($N=2$) с не зависящим от времени гамильтонианом всегда интегрируется в квадратурах. Наличие нетривиальных интегралов при $N>2$, не зависящих от «энергии» H[1], позволяет по-

[1] При помощи интеграла энергии H порядок системы также понижается на 2 единицы, но гамильтониан редуцированной системы будет явно зависеть от времени [1].

низить порядок гамильтоновой системы (1.8) сразу на две единицы. Приведем соответствующую конструкцию (см. также т. 3 настоящего издания и гл. 3, § 3 статьи В. И. Арнольда и А. Б. Гивенталя). Пусть $F(y)$ — интеграл гамильтоновой системы с гамильтонианом H, причем вектор $(\xi^i_F(y))=\left(h^{ij}(y)\frac{\partial F(y)}{\partial y^j}\right)$ не зависим с ξ_H. Рассмотрим поверхность уровня M_c:

$$F(y)=c, \qquad (1.107)$$

и на ней гамильтонов поток, определяемый гамильтонианом $F(y)$,

$$y_\tau^i=\{y^i, F(y)\}, \ i=1, \ldots, N. \qquad (1.108)$$

Поток (1.8) с гамильтонианом H переставляет траектории потока (1.108) в силу коммутации (1.106), поэтому задает динамическую систему на совокупности траекторий потока (1.108). Траектории потока (1.108), лежащие на уровне M_c «нумеруются» точками трансверсальной этим траекториям поверхности M_c^0 (определенной, вообще говоря, локально). Определим «операцию редукции» исходной скобки Пуассона $h^{ij}(y)$ на M_c^0. Рассмотрим подалгебру всех функций $z(y)$, коммутирующих с $F(y)$,

$$\{F(y), z(y)\}=0. \qquad (1.109)$$

Пусть независимые функции $z^1(y), \ldots, z^{N-2}(y)$ удовлетворяют (1.109) и функционально не зависят от $F(y)$. Они постоянны вдоль траекторий потока (1.108) и вместе с $F(y)$, τ определяют локальные координаты в окрестности трансверсальной поверхности M_c^0. Величины $z^1, \ldots, z^{N-2}$ тем самым задают локальные координаты на трансверсальной поверхности M_c^0. Очевидно имеем

$$\{\tau, F\}=1, \quad \{\tau, z^q\}=f^q(z, F), \quad \{z^p, z^q\}=\tilde{h}^{pq}(z, F). \qquad (1.110)$$

Поэтому на выбор координат $z^1, \ldots, z^{N-2}$ можно наложить полезные дополнительные условия

$$\{\tau, z^q\}=0, \quad q=1, \ldots, N-2. \qquad (1.111)$$

Редуцированная скобка Пуассона на M_c^0 имеет, по определению, вид:

$$\{z^p, z^q\}_{\rm red}=\{z^p(y), z^q(y)\}=\tilde{h}^{pq}(z,c), \quad p, q=1, \ldots, N-2. \qquad (1.112)$$

Очевидно, правая часть зависит только от координат на M_c^0 (и от c), и не зависит от выбора поверхности M_c^0. Гамильтониан в силу (1.105) имеет вид:

$$H(y)=\tilde{H}(z^1, \ldots, z^{N-2}, F), \qquad (1.113)$$

поэтому исходная гамильтонова система корректно ограничивается на M_c^0:

$$\dot{z}^q=\{z^q, \tilde{H}(z, c)\}_{\rm red}, \quad q=1, \ldots, N-2. \qquad (1.114)$$

Таким образом, интегрирование исходной системы (1.8) сведено к интегрированию гамильтоновой системы (1.114), порядок которой понижен на 2 единицы. После этого определяется зависимость координаты τ от времени из уравнения (учитывая (1.110), (1.111))

$$\dot{\tau}=\{\tau, \tilde{H}(z, F)\}=\frac{\partial \tilde{H}(z, F)}{\partial F} \tag{1.115}$$

(одной квадратурой).

Возможность провести глобально процедуру редукции требует дополнительного исследования. Достаточно, например, предположить, что c — регулярное значение функции $F(y)$, а однопараметрическая группа G_τ сдвигов вдоль траекторий системы (1.108) компактна и не имеет стационарных точек. При практической реализации описанной выше процедуры главная трудность заключается в построении «трансверсальных» координат $z^1, \ldots, z^{N-2}$.

Пример 1. Пусть $H=H(x, p)$ — гамильтониан в фазовом пространстве R^{2n} с каноническими координатами $(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ вида (1.19). Предположим, что $H(x, p)$ инвариантен относительно «пространственных трансляций»

$$x^i \mapsto x^i+a, \quad p_i \mapsto p_i, \tag{1.116}$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x^i}=0. \tag{1.117}$$

Для этого достаточно, чтобы гамильтониан имел вид

$$\begin{aligned} &H(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)= \\ &=\hat{H}(x^1-x^n, \ldots, x^{n-1}-x^n, p_1, \ldots, p_n). \end{aligned} \tag{1.118}$$

Тогда, очевидно, величина («полный импульс»)

$$F=\sum_{i=1}^{n} p_i \tag{1.119}$$

коммутирует с H, $\{H, F\}=0$. Координаты $z=(z^1, \ldots, z^{2n-2})=(\tilde{x}^q, \tilde{p}_q)$ на редуцированном фазовом пространстве имеют вид:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}^q=x^q-x^n, \quad q=1, \ldots, n-1, \\ &\tilde{p}_q=p_q, \quad q=1, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{1.120}$$

Редуцированный гамильтониан $\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{p}; c)$ на поверхности

$$p_1+\ldots+p_n=c \tag{1.121}$$

имеет вид

$$\tilde{H}(\tilde{x}, \tilde{p}; c) = \hat{H}\left(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^{n-1}, \tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_{n-1}, c - \sum_{q=1}^{n-1} \tilde{p}_q\right). \quad (1.122)$$

Редуцированные скобки — канонические:

$$\{\tilde{x}^q, \tilde{x}^r\}_{\mathrm{red}} = \{\tilde{p}_q, \tilde{p}_r\}_{\mathrm{red}} = 0, \quad \{\tilde{x}^q, \tilde{p}_r\} = \delta_r{}^q,$$
$$q, r = 1, \ldots, n-1, \quad (1.123)$$

и исходная гимильтонова система сводится к системе в R^{2n-2}

$$\dot{\tilde{x}}^q = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_q}, \quad \dot{\tilde{p}}_q = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{x}^q}, \quad q = 1, \ldots, n-1. \quad (1.124)$$

Зависимость величины $\tau = x^n$ от времени t находится из уравнения

$$\dot{\tau} = \tilde{H}_c. \quad (1.125)$$

Предположим теперь, что гамильтонова система (1.8) с гамильтонианом H обладает несколькими интегралами. Отметим, прежде всего, простое, но важное утверждение: интегралы системы (1.8) образуют подалгебру относительно скобки Пуассона. Доказательство очевидно из тождества Якоби (1.5).

Наличие нетривиальных попарно коммутирующих интегралов $F_1(y), \ldots, F_k(y)$,

$$\{F_i, H\} = 0, \ \{F_i, F_j\} = 0, \ i, j = 1, \ldots, k, \quad (1.126)$$

позволяет, согласно описанной выше схеме, понизить порядок гамильтоновой системы на $2k$. В частности, если исходная скобка Пуассона была невырожденной, $N = 2n$, то наличие n попарно коммутирующих интегралов у гамильтоновой системы позволяет, в принципе, проинтегрировать эту систему в квадратурах. Мы обсудим свойства и примеры таких систем в § 3.

Набор некоммутирующих интегралов также позволяет понизить порядок исходной гамильтоновой системы, однако здесь алгоритм редукции более сложен. Разберем сначала простой пример.

Пример 2. Пусть $H(x, p) = \frac{|p|^2}{2m} + U(|x|)$ — сферически симметричный гамильтониан в R^6, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $p = (p_1, p_2, p_3)$. Здесь имеются три «интеграла момента»

$$M_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2, \quad M_2 = x_3 p_1 - x_1 p_3, \quad M_3 = x_1 p_2 - x_2 p_1 \quad (1.127)$$

с попарными скобками

$$\{M_i, M_j\} = \varepsilon_{ijk} M_k. \quad (1.128)$$

(Фактически, сохраняющимся является весь вектор момента

$$M = [x, p].) \quad (1.129)$$

Интегралов здесь 3, но из-за их некоммутативности редуцированное фазовое пространство будет иметь размерность 2. Фиксируем значение момента

$$M = m \neq 0. \tag{1.130}$$

Без ограничения общности можно считать, что $m = (\mu, 0, 0)$, и условия (1.130) запишутся в виде

$$x_2p_3 - x_3p_2 = \mu, \quad x_3p_1 - x_1p_3 = 0, \quad x_1p_2 - x_2p_1 = 0. \tag{1.131}$$

Из последних двух уравнений при $\mu \neq 0$ следует $x_1 = p_1 = 0$, т. е. движение происходит в плоскости (x_2, x_3). Поток с гамильтонианом M_1, представляющий собой вращения в плоскостях (x_2, x_3) и (p_2, p_3) на один и тот же угол, действует, таким образом, на трехмерной поверхности $x_1 = p_1 = 0$, $x_2p_3 - x_3p_2 = \mu$. Факторизуя по этому потоку, получаем искомое редуцированное фазовое пространство. Для факторизации удобнее всего использовать полярные координаты r, φ в плоскости (x_2, x_3), полагая

$$x_2 = r\cos\varphi, \quad x_3 = r\sin\varphi \tag{1.132}$$

и вводя сопряженные импульсы

$$p_2 = p_r\cos\varphi - \frac{p_\varphi}{r}\sin\varphi,$$

$$p_3 = p_r\sin\varphi + \frac{p_\varphi}{r}\cos\varphi. \tag{1.133}$$

Каноническими координатами на редуцированном фазовом пространстве служат r, p_r; редуцированный гамильтониан имеет вид:

$$\tilde{H}(r, p_r) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{\mu^2}{2mr^2} + U(r). \tag{1.134}$$

Зависимость φ от времени получается отдельно из уравнения $p_\varphi = \mu$, откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{\mu}{mr^2} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi}. \tag{1.135}$$

Конструкция примера 2 допускает очевидные обобщения, восходящие к Якоби и Пуанкаре (H. Poincaré) и сформулированные на языке симплектических многообразий в ряде работ последних десятилетий (см. также т. 3 настоящего издания и гл. 3, § 3 статьи В. И. Арнольда и А. Б. Гивенталя).

Пусть гамильтонова система (1.8), обладает интегралами $F_1, \ldots, F_r$, попарные скобки которых выражаются в виде линейных комбинаций этих же функций,

$$\{F_i, F_j\} = c_{ij}^k F_k, \tag{1.136}$$

коэффициенты $c_{ij}{}^k$ постоянные (следующий по сложности случай после коммутирующих интегралов; ср. формулы (1.128) примера 2). Таким образом, пространство линейных комбинаций

$$L = \{a^iF_i(y)\}, \quad a^1, \ldots, a^r \text{ — константы}, \tag{1.137}$$

замкнуто относительно скобки Пуассона и образует, тем самым, конечномерную алгебру Ли. Функции $F_1(y),\ldots,F_r(y)$ образуют базис в L, а c_{ij}^k — структурные константы. Пусть G — соответствующая группа Ли. Тогда G действует локально на фазовом пространстве каноническими преобразованиями (сохраняющими скобки Пуассона): однопараметрические подгруппы из G, отвечающие базисным векторам F_i из алгебры Ли L, есть гамильтоновы потоки

$$y_\tau^j=\{y^j,\ F_i\},\ j=1,\ldots,N. \tag{1.138}$$

При фиксированном y набор чисел $(F_1(y),\ldots,F_r(y))=F(y)$ можно считать координатами линейной формы на алгебре Ли L: если $(a^1,\ldots,a^r)$ — вектор из L, то

$$F(y)(a)=a^iF_i(y). \tag{1.139}$$

Тем самым определено *отображение моментов*

$$y\mapsto F(y)\in L^*. \tag{1.140}$$

Фиксируем некоторый элемент $c=(c_1,\ldots,c_r)\in L^*$ и рассмотрим поверхность уровня момента (совместную поверхность уровня интегралов $F_1,\ldots,F_r$)

$$F(y)=c\leftrightarrow(F_1(y)=c_1,\ldots,F_r(y)=c_r). \tag{1.141}$$

Предположим, что эта поверхность M_c является многообразием. Гамильтонов поток, отвечающий гамильтониану $f_a(y)=a^iF_i(y)$, сохраняет поверхность уровня M_c, если вектор $a=(a^1,\ldots,a^r)$ удовлетворяет линейным соотношениям

$$\{f_a,\ F_j\}|_{M_c}=a^ic_{ij}^kc_k=0,\quad j=1,\ldots,r. \tag{1.142}$$

Такие векторы a образуют подалгебру Ли $L_c\subset L$. Пусть l — размерность этой подалгебры; ее базис составляют функции

$$f_s(y)=a_s^iF_i(y),\quad s=1,\ldots,l, \tag{1.143}$$

где (a_s^i) — фундаментальная система решений уравнений (1.142). (Подгруппа $G_c\subset G$ с алгеброй Ли $L_c\subset L$ — это подгруппа изотропии элемента $c\in L^*$ в коприсоединенном представлении Ad*. В примере 2 (выше) подгруппа G_c совпадала с вращениями вокруг оси $c=(\mu,0,0)$.)

Факторизуя M_c по действию потоков с гамильтонианами f_a из подалгебры L_c, получаем приведенное фазовое пространство M_c^0 (коразмерности $r+l$). (Все M_c расслаивается (локально) над M_c^0 со слоем G_c.) Координатами на M_c^0 служат функции $z^q=z^q(y)$ такие, что

$$\{z^q,\ F_j\}|_{M_c}=0,\quad j=1,\ldots,r, \tag{1.144}$$

не зависящие от функций $f_1,\ldots,f_l$ (1.143) (градиенты функций z^q и f_s должны порождать все касательное пространство к M_c).

Как и выше, определяем редуцированные скобки на M_c^0 равенством

$$\{z^q,\ z^p\}_{\text{red}} = \{z^q(y),\ z^p(y)\}. \tag{1.145}$$

Гамильтониан также корректно ограничивается на M_c^0. Получаем редуцированную гамильтонову систему

$$\dot{z}^q = \{z^q,\ \tilde{H}(z;\ c)\}_{\text{red}},\quad q=1,\ldots,N-l-r. \tag{1.146}$$

Ясно, что в коммутативном случае $c_{ij}^k=0$ подалгебра L_c совпадает со всей алгеброй Ли L, т. е. $l=r$ и порядок системы понижается на $2r$.

Мы не обсуждали пока механизмов возникновения интегралов у гамильтоновых систем. Наиболее известным среди таких механизмов является *симметрия гамильтоновой системы*, т. е. наличие непрерывной группы G канонических преобразований фазового пространства, сохраняющих гамильтониан:

$$H(gy)=H(y),\ g\in G. \tag{1.147}$$

Пусть L — алгебра Ли группы G, $e_1\ldots,e_r$ — базис в L, коммутаторы в L имеют вид:

$$[e_i,\ e_j]=c_{ij}^k e_k. \tag{1.148}$$

Каждая однопараметрическая подгруппа $\exp(te_i)$ преобразований фазового пространства обладает гамильтонианом $F_i(y)$ (определенным, быть может, локально), т. е. преобразования $y\mapsto\exp(\tau e_i)\,y$ есть сдвиги вдоль траекторий системы

$$y_\tau^j=\{y^j,\ F_i(y)\},\quad j=1,\ldots,N. \tag{1.149}$$

Функции $F_i(y)$ являются интегралами гамильтоновой системы (1.147). Действительно,

$$\{H(y),\ F_i(y)\}=\frac{d}{d\tau}H(\exp(\tau e_i)\,y)_{\tau=0}=0.$$

Функции $F_i(y)$ называют *генераторами канонического действия G*.

Каноническое *действие группы Ли* называется *пуассоновским*, если функции $F_i(y)$ определены глобально и их скобки Пуассона имеют вид (1.136), где c_{ij}^k — структурные константы (1.148) алгебры Ли L.

Пример. Пусть фазовое пространство имеет вид кокасательного расслоения T^*M гладкого n-мерного многообразия M со стандартными скобками (1.30) и G действует на M как группа диффеоморфизмов. Соответствующее действие G на T^*M каноническое. Построим функции $F_i(y)$, где $y=(x,\ p)$ — канонические координаты на T^*M (локально). Пусть

$$X_i^k(x)=\frac{d}{d\tau}(\exp(\tau e_i)\,x)_{\tau=0}^k,\quad k=1,\ldots,n. \tag{1.150}$$

Положим

$$F_i(x, p) = p_k X_i^k(x), \quad i = 1, \ldots, r. \tag{1.151}$$

Функции $F_i(x, p)$ определены глобально на T^*M и являются генераторами действия G. Их скобки Пуассона, как легко видеть, имеют вид (1.136). Таким образом, действие G на T^*M является пуассоновским.

Для произвольного фазового пространства каноническое действие G может и не быть пуассоновским. Во-первых, даже если скобка Пуассона невырождена, интегралы $F_i(y)$ могут не быть глобально определенными (однозначными); корректно определены лишь их дифференциалы dF_i. Предположим, далее, что функции F_i определены глобально (с точностью до константы). Нетрудно показать, что тогда их скобки Пуассона имеют вид:

$$\{F_i, F_j\} = c_{ij}^k F_k + b_{ij}, \tag{1.152}$$

где c_{ij}^k — структурные константы алгебры Ли L, а $b_{ij} = -b_{ji}$ — некоторые постоянные. Кососимметрическая матрица b_{ij} определяет билинейную форму на алгебре Ли L, $B(\xi, \eta) = b_{ij}\xi^i\eta^j$, которая является (двумерным) коциклом:

$$B([\xi, \eta], \zeta) + B([\zeta, \xi], \eta) + B([\eta, \zeta], \xi) = 0 \tag{1.153}$$

(следствие из тождества Якоби (1.5)). Для того, чтобы действие группы G было пуассоновским, нужно чтобы матрица b_{ij} имела вид (β_k — некоторые константы):

$$b_{ij} = \beta_k c_{ij}^k \tag{1.153$'$}$$

(коцикл b_{ij} когомологичен нулю). В этом случае, заменяя $F_j \to F_j + \beta_j$, получаем пуассоновское действие.

Если действие группы G на фазовом пространстве пуассоновское, то описанная выше процедура редукции гамильтонова формализма может быть проведена глобально при некоторых дополнительных ограничениях. Достаточно, например, предположить, что c — регулярное значение для отображения момента (1.140) (т. е. M_c — многообразие), подгруппа изотропии G_c элемента $c \in L^*$ относительно коприсоединенного представления Ad^* компактна, и ее элементы действуют на M_c без неподвижных точек. Так, для случая T^*M, где на M действует группа G, редуцированное фазовое пространство имеет вид $T^*(M/G)$, если, разумеется, фактормногообразие M/G определено.

Пример 3 ([78]). *Уравнения Леггетта* (A. J. Leggett) динамики «параметров порядка» в B-фазе сверхтекучего ^{3}He. В состоянии гидродинамического покоя и с ненулевым спином состояние в B-фазе определяется парой — матрицей вращения $R = (R_{ij}) \in SO(3)$ и $s = (s_i)$, $i = 1, 2, 3,$ — «магнитным моментом».

Переменные s_i представляют собой координаты на сопряженном пространстве к алгебре Ли группы $SO(3)$, аналогично моментам M_i. Стандартная скобка Пуассона на $T^*SO(3)$ в переменных (s_i, R_{jk}) записывается так:

$$\{s_i, s_j\} = \varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{R_{ij}, R_{kl}\} = 0, \quad \{s_i, R_{jl}\} = \varepsilon_{ijk} R_{kl}. \qquad (1.154)$$

Гамильтониан системы Леггетта в B-фазе и внешнем магнитном поле имеет твид:

$$H = \frac{1}{2} a s^2 + b \sum s_i F_i + V(\cos\theta), \qquad (1.155)$$

где a, b — константы, $F = (F_i)$ — внешнее поле,

$$V(\cos\theta) = \mathrm{const}\left(\frac{1}{2} + 2\cos\theta\right)^2; \qquad (1.156)$$

здесь R_{ij} — это вращение на угол θ вокруг оси n_i, $n^2 = 1$:

$$R_{ij} = \cos\theta\delta_{ij} + (1 - \cos\theta) n_i n_j + \sin\theta\varepsilon_{ijk} n_k, \qquad (1.157)$$

$$1 + 2\cos\theta = R_{ii} = \mathrm{Sp}\, R. \qquad (1.158)$$

После замены

$$a s_i = \omega_i, \quad \Omega_{jk} = \varepsilon_{jki}\omega_i = (\dot{R}R^{-1})_{jk} \qquad (1.159)$$

мы получим лагранжеву систему в переменных $(R_{ij}, \dot{R}_{ij})$ на $T^*SO(3)$, где кинетическая энергия определяется двусторонне инвариантной метрикой Киллинга, и потенциал $V(\cos\theta)$ инвариантен относительно внутренних автоморфизмов

$$R \mapsto gRg^{-1}, \quad s \mapsto gs, \quad g \in SO(3). \qquad (1.160)$$

Если поле $F = (F_i)$ постоянно, то весь гамильтониан инвариантен относительно однопараметрической группы преобразований (1.160), где g принадлежит группе вращений вокруг оси поля F. Пусть, далее, $F = (F, 0, 0)$.

При нулевом потоке $F = 0$ система допускает группу $SO(3)$ преобразований (1.160) и полностью проинтегрирована в [129]. Преобразования (1.160) порождают сохраняющийся при $F = 0$ вектор

$$A = (A_j) = (1 - \cos\theta)\left[n, \mathrm{ctg}\frac{\theta}{2} S + [n, S]\right], \qquad (1.161)$$

где скобки Пуассона такие же, как и для обычного момента:

$$\{A_i, A_j\} = \varepsilon_{ijk} A_k,$$

$$\left\{A_i, \frac{1}{2} a s^2 + V(\cos\theta)\right\} = 0. \qquad (1.162)$$

Переменные s^2 и θ, входящие в гамильтониан при $F = 0$, порождают замкнутую алгебру скобок Пуассона $\{s^2, s_\parallel, \theta\}$ [78], где

$$s_\parallel = \sum s_i n_i, \qquad (1.163)$$

$$\{s^2, \theta\} = 2 s_\parallel, \quad \{s_\parallel, \theta\} = 1, \quad \{s^2, s_\parallel\} = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}(s^2 - s_\parallel^2). \qquad (1.164)$$

Величина $A^2 = \sum A_i^2 = (1 - \cos\theta)(s^2 - s_{\parallel}^2)$ имеет нулевую скобку Пуассона со всеми в этой подалгебре

$$\{A^2, s^2\} = \{A^2, s_{\parallel}\} = \{A^2, \theta\} = 0. \tag{1.165}$$

В ненулевом магнитном поле $(F, 0, 0)$ остается только один интеграл (кроме энергии)

$$\{A_1, H\} = 0. \tag{1.166}$$

В данном случае оказывается возможным провести процедуру редукции гамильтонова формализма до конца (глобально) и свести систему к 2-м степеням свободы.

Интеграл A_1 порождает группу (1.160), где g — вращение вокруг первой оси $n = (1, 0, 0)$. Переменные, инвариантные относительно этой подгруппы, таковы:

$$s^2, \; s_{\parallel}, \; \theta, \; n_1, \; s_1, \; \tau = s_2 n_3 - n_2 s_3 \tag{1.167}$$

со связью чисто геометрического происхождения

$$s^2 \tau^2 = (s^2 - s_1^2)(s^2 - s_{\parallel}^2) - (s^2 n_1 - s_1 s_{\parallel})^2. \tag{1.168}$$

Нетрудно вычислить, что переменные (1.167) образуют замкнутую алгебру скобок Пуассона, содержащую гамильтониан H (1.155) и имеющую функциональную размерность 5. Величина A_1, лежащая в этой алгебре, имеет нулевую скобку со всеми переменными

$$0 = \{A_1, s^2\} = \{A_1, s_{\parallel}\} = \{A_1, \theta\} = (A_1, n_1\} = \{A_1, n_1\}. \tag{1.169}$$

Поэтому, накладывая условие $A_1 = \mathrm{const}$, можно, по-прежнему, пользоваться формулами для скобок Пуассона величин (1.167), вытекающими из (1.164). При условии $A_1 = \mathrm{const}$ мы выберем за базисные следующие переменные:

$$A^2, \; s_{\parallel}, \; \theta, \; n_1 = n. \tag{1.170}$$

Их скобки имеют вид:

$$\begin{gathered} \{s_{\parallel}, \theta\} = 1, \quad \{\theta, n\} = 0, \\ \{A^2, s^2\} = \{A^2, \theta\} = \{A^2, s_{\parallel}\} = 0, \\ \{A^2, n\} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - n^2) A^2 - \frac{1}{4} A_1^2}. \end{gathered} \tag{1.171}$$

Таким образом, канонические переменные могут быть выбраны в виде

$$\begin{gathered} x^1 = \theta, \quad p_1 = p_\theta = s_{\parallel}, \\ x^2 = n, \quad p_2 = p_n = \sqrt{\frac{2A^2}{1 - n^2} - \frac{A_1^2}{(1 - n^2)^2}}. \end{gathered} \tag{1.172}$$

Гамильтониан приобретает вид:

$$H=\frac{1}{2}a\left[p_\theta^2+\frac{1-n^2}{2(1-\cos\theta)}\left(p_n^2+\frac{A_1^2}{(1-n^2)^2}\right)\right]+$$
$$+bF\left(np_\theta+\frac{1-n^2}{2}\sin\theta p_n+A_1^2\frac{2-\sin^2\theta}{2(1-\cos\theta)}\right)+V(\cos\theta). \quad (1.173)$$

Введем теперь сферические координаты

$$\theta=2\chi,\quad n=n_1=\sin\varphi \quad (1.174)$$

и перейдем к лагранжеву формализму. Мы получим

$$L=2a(\dot\chi^2+\sin^2\chi\dot\varphi^2)-\tilde A_1\dot y^1-\tilde A_2\dot y^2-U(y), \quad (1.175)$$

где $y^1=\chi$, $y^2=\varphi$,

$$\tilde A_1=2b\sin\varphi,\quad \tilde A_2=8bF\cos\varphi\sin^3\chi\cos\chi,$$
$$U=V(\cos\theta)+\frac{aA_1^2}{4\sin^2\chi\cos^2\varphi}+bF\frac{A_1(1-\sin^2\chi\cos^2\chi)}{2\sin^2\chi}-$$
$$-\frac{1}{2}b^2F^2(\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi\sin^3\chi\cos\chi).$$

Таким образом, мы получили систему на области сферы S^2 с обычной метрикой, где имеются эффективное магнитное поле и скалярный потенциал. При $A_1\neq0$ эта система не продолжаема на всю сферу, так как она имеет сингулярность при $\varphi=0,\ \pi$.

Рассмотрим теперь примеры континуальных систем с лишними интегралами. Рассмотрим сначала случай лагранжевых полевых систем (1.65), записываемых в гамильтоновом виде при помощи преобразования (1.67). В случае, когда плотность лагранжиана $\Lambda(q,\ q_x,\ q_t)$ не зависит явно от пространственно-временных координат x^α, t, $\alpha=1,\ldots,m$, справедливы законы сохранения полной энергии

$$\dot E=0,\quad E=\mathscr{H}=\int d^mx\,(p_iq_t^i-\Lambda) \quad (1.176)$$

и вектора полного импульса

$$\dot P_\alpha=0,\quad P_\alpha=\int p_i\frac{\partial q^i}{\partial x^\alpha}\,d^mx. \quad (1.177)$$

Функционалы P_α являются генераторами сдвигов по пространственным переменным, т. е.

$$\{p_i(x),\ P_\alpha\}=\frac{\partial p_i(x)}{\partial x^\alpha},\quad \{q^i(x),\ P_\alpha\}=\frac{\partial q^i(x)}{\partial x^\alpha}, \quad (1.178)$$

$$\{P_\alpha,\ P_\beta\}=0,\quad \alpha,\ \beta=1,\ \ldots,\ m. \quad (1.179)$$

Подчеркнем, что генераторы пространственных сдвигов являются локальными полевыми интегралами. Законы сохранения (1.176), (1.177) часто записывают в инфинитезимальной форме, вводя *тензор энергии-импульса*

$$T_b^{\ a}=q^i_{x^b}\frac{\partial\Lambda}{\partial q^i_{x^a}}-\delta^a_b\Lambda, \quad (1.180)$$

где $a, b=0, 1, \ldots, m$, $x^0=t$. Имеем [43]

$$E=\int T_0^0 d^m x, \quad P_\alpha=\int T_\alpha^0 d^m x, \tag{1.181}$$

$$\frac{\partial T_b^a}{\partial x^a}=0, \quad b=0, 1, \ldots, m. \tag{1.182}$$

Более обще, можно рассматривать вариационные задачи вида

$$\delta S=0, \quad S=\int \Lambda(x, q, q_x)\, d^{m+1}x \tag{1.183}$$

(здесь, как и выше, мы полагаем $x=(x^a)$, $a=0, 1, \ldots, m$, $x^0=t$), инвариантные относительно более общих однопараметрических групп преобразований $G_\tau(x, q)$ вида

$$\begin{aligned} x_\tau^a&=X^a(x), \quad a=0, 1, \ldots, m,\\ q_\tau^i&=Q^i(x, q), \quad i=1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1.184}$$

Каждой такой группе отвечает «сохраняющийся ток»

$$J^a=\Lambda X^a+\frac{\partial \Lambda}{\partial q_a^i}\left(Q^i-q_{x^b}^i X^b\right), \tag{1.185}$$

$$\frac{\partial J^a}{\partial x^a}=0 \tag{1.186}$$

(*теорема Нётер* (E. Noether) [9]). Сохраняющейся является величина

$$\int\limits_{x^0=\mathrm{const}} J^0 d^m x. \tag{1.187}$$

Если преобразования (1.184) не затрагивают время, т. е. $X^0=\mathrm{const}$, то они определяют семейство канонических преобразований в пространстве полей $(p(x), q(x))$, генератор которых является локальным полевым интегралом с плотностью

$$J^0=p_i\left(Q^i-q_{x^\alpha}^i X^\alpha\right). \tag{1.188}$$

Вторая теорема Нётер относится к случаю вариационных задач, допускающих симметрии с функциональными параметрами (как, например, в теории калибровочных полей [87]). Уравнения экстремалей (1.65) в этом случае не являются независимыми, а удовлетворяют некоторой системе дифференциальных соотношений. Эту теорему мы здесь обсуждать не будем.

§ 3. Теорема Лиувилля. Переменные действие — угол

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением фазовых пространств с невырожденной скобкой Пуассона. Важная *теорема Лиувилля* (J. Liouville) изучает тот случай гамильтоновых систем с n степенями свободы (т. е. в $2n$-мерном фазовом пространстве), когда имеется ровно n функционально независимых интегралов $F_1=H, F_2, \ldots, F_n$, попарные скобки Пуассона которых равны нулю, $\{F_i, F_j\}=0$, $j=1, \ldots, n$. Такие *системы* называют часто *вполне интегрируемыми*. В этом случае поверхности уровня интегралов

$$F_1=c_1, \ldots, F_n=c_n \tag{1.189}$$

представляют собой факторгруппы R^n по решеткам конечного ранга $\leqslant n$; в частности, компактные неособые поверхности уровня являются n-мерными торами. Если поверхность уровня (1.189) компактна, то в ее окрестности можно ввести такие координаты $s_1, \ldots, s_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ $(0\leqslant\varphi_i<2\pi)$ (*переменные «действие — угол»*), что:

а)

$$\{s_i, s_j\}=\{\varphi_i, \varphi_j\}=0, \quad \{\varphi_i, s_j\}=\delta_{ij}; \tag{1.190}$$

б) $s_i=s_i(F_1, \ldots, F_n)$, φ_j — координаты на поверхностях уровня (1.189); в) в переменных (s_i, φ_j) исходная гамильтонова система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{s}_i&=0, \\ \dot{\varphi}_i&=\omega_i(s_1, \ldots, s_n), \end{aligned}\right\} \quad i=1, \ldots, n. \tag{1.191}$$

Приведем идею доказательства этой теоремы (см., например, [42]). Поверхность уровня M_c вида (1.189) представляет собой гладкое многообразие в силу независимости интегралов $F_1, \ldots, F_n$ $\left(\text{т. е. независимости их «градиентов» } (\xi_i)^j=h^{jk}\frac{\partial F_i}{\partial y^k}\right)$. На этом многообразии действует группа R^n потоков с гамильтонианами $F_1, \ldots, F_n$. Выберем начальную точку $x_0=x_0(c)\in M_c$ и выделим в R^n решетку: вектор $d\in R^n$ принадлежит решетке, если d, действуя на x_0, снова дает x_0. Возникает подгруппа $\{d\}\subset R^n$. Эта подгруппа дискретна и поэтому изоморфна решетке, натянутой на k векторов R^n, где $k\leqslant n$. Очевидно, лишь при $k=n$ мы получим компактное многообразие (тор T^n).

Построим теперь переменные действие—угол. На данной поверхности уровня M_c можно составить такие линейные комбинации полей ξ_i:

$$\eta_i=b_i^j\xi_j, \quad i=1, \ldots, n, \tag{1.192}$$

что вводимые с их помощью координаты в группе R^n, действующей на торе $T^n=M_c$, совпадут с углами $0\leqslant\varphi_j<2\pi$ ($\varphi_i=0$ — это точка x_0). Коэффициенты b_i^j будут зависеть от набора $c_1, \ldots, c_n$ в окрестности избранной поверхности уровня. Таким образом, мы имеем

$$\eta_i=b_i^j(F_1, \ldots, F_n)\,\xi_j. \tag{1.193}$$

Это вводит координаты $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$ в целую область около данного M_c. В этой области мы имеем координаты $(F_1, \ldots, F_n, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n)$ и невырожденную матрицу скобок Пуассона

$$\begin{pmatrix} \{F_i, F_j\}=0 & \{F_i, \tilde{\varphi}_j\} \\ \{\tilde{\varphi}_i, F_j\} & \{\tilde{\varphi}_i, \tilde{\varphi}_j\} \end{pmatrix}, \tag{1.194}$$

где $\det\{F_i, \tilde{\varphi}_j\} \neq 0$. Введем теперь переменные действия. Для фазового пространства R^{2n} с каноническими координатами $(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ переменные действия имеют вид:

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_i} p_k dx^k, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.195}$$

Здесь γ_i — i-й базисный цикл тора T^n,

$$\gamma_i:\ 0 \leqslant \tilde{\varphi}_i \leqslant 2\pi, \quad \tilde{\varphi}_j = \mathrm{const} \text{ при } j \neq i. \tag{1.196}$$

Получим:

$$\{\tilde{\varphi}_j, s_i\} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{1.197}$$

В произвольном фазовом пространстве с формой $\Omega = h_{ij} dy^i \wedge dy^j$ вида (1.17) нужно действовать так: форма Ω обращается в нуль на торах $T^n = M_c$. Поэтому на некоторой окрестности данного тора $T^n = M_c$ эта форма точная:

$$\Omega = d\omega.$$

Переменные действия имеют вид, аналогичный (1.195):

$$s_i = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{\gamma_i} \omega, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.198}$$

Положим теперь

$$\varphi_i = \tilde{\varphi}_i + b_i (s_1, \ldots, s_n), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.199}$$

Подберем b_i из условия $\{\varphi_i, \varphi_j\} = 0$. Это всегда можно сделать в силу (1.197). Координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ на каждой поверхности уровня M_c совпадут с выбранными ранее углами $\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_n$ с точностью до сдвига. Матрица скобок Пуассона примет вид (1.190), гамильтониан $H = F_1$ запишется в виде

$$H = \tilde{H} (s_1, \ldots, s_n). \tag{1.200}$$

Уравнения движения будут иметь вид (1.191). Это — условно-периодическое движение по n-мерному тору с частотами

$$\omega_i (s_1, \ldots, s_n) = \frac{\partial \tilde{H} (s_1, \ldots, s_n)}{\partial s_i}. \tag{1.201}$$

Пример 1. Пусть поверхность уровня $H(x, p) = E$ системы с одной степенью свободы компактна. Тогда мы имеем канонические координаты действие — угол

$$s(E) = \oint\limits_{H=E} p\,dx, \quad \{s, \varphi\} = 1. \tag{1.202}$$

Рассмотрим теперь некоторые примеры вполне интегрируемых систем с двумя степенями свободы. Здесь, согласно теореме Лиувилля, для «полной интегрируемости» достаточно знать один не зависимый от энергии H интеграл.

Пример 2. Уравнения вращения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой представляются, согласно § 1, в виде гамильтоновой системы на $E(3)$ с гамильтонианом

$$H(M, p) = \frac{M_1^2}{2I_1} + \frac{M_2^2}{2I_2} + \frac{M_3^2}{2I_3} + \gamma_1 p_1 + \gamma_2 p_2 + \gamma_3 p_3. \tag{1.203}$$

Здесь оси системы координат совпадают с главными осями инерции тела, начало — в точке закрепления, I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции тела, γ_1, γ_2, γ_3 — координаты центра масс. Скобки Пуассона имеют вид (1.41). Фазовое пространство здесь шестимерно, но ранг матрицы скобок Пуассона равен 4. Поэтому для интегрируемости по Лиувиллю достаточно знать один интеграл (кроме интеграла энергии). Известны следующие случаи интегрируемости.

а) *Случай Эйлера*: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Лишний интеграл — квадрат полного момента $M^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$.

б) *Случай Лагранжа*: $I_1 = I_2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Здесь имеется осевая симметрия (относительно третьей оси). Это дает лишний интеграл $M_3 = \text{const}$.

в) *Случай С. В. Ковалевской* $I_1 = I_2 = I_3/2$, $\gamma_3 = 0$.

Здесь появление лишнего интеграла

$$F = |\, I_1 (M_1 + iM_2)^2 - 2(\gamma_1 + i\gamma_2)(p_1 + ip_2)|^2 \tag{1.204}$$

не связано с симметрией системы (см. гл. 2 ниже).

Пример 3. Задача о движении твердого тела в идеальной жидкости (см. выше § 1) намного богаче интегрируемыми случаями. Простейшим из них является *случай Кирхгофа*, где гамильтониан имеет вид (1.48), причем $a_1 = a_2$, $b_{11} = b_{22}$, $b_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $c_{11} = c_{22}$, $c_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Здесь, как и в случае Лагранжа, имеется осевая симметрия, и лишний интеграл есть M_3. Более сложные интегрируемые случаи (со «скрытой симметрией») имеют следующий вид.

а) *Случай Клебша* (R. Clebsch). Здесь коэффициенты гамильтониана (1.48) таковы:

$$b_{ij} = 0, \quad c_{ij} = c_i \delta_{ij}, \tag{1.205}$$

где коэффициенты a_i и c_j удовлетворяют соотношению

$$\frac{c_2 - c_3}{a_1} + \frac{c_3 - c_1}{a_2} + \frac{c_1 - c_2}{a_3} = 0. \tag{1.206}$$

Дополнительный интеграл имеет вид:

$$M_1^2+M_2^2+M_3^2-(a_1p_1^2+a_2p_2^2+a_3p_3^2). \qquad (1.207)$$

б) *Случай Ляпунова—Стеклова—Колосова:* $b_{ij}=b_i\delta_{ij}$, $c_{ij}=c_i\delta_{ij}$, причем

$$b_j=\mu(a_1a_2a_3)\,a_j^{-1}+\nu, \quad c_1=\mu^2a_1(a_2-a_3)^2+\nu', \ldots \qquad (1.208)$$

(μ, ν, $\nu'=\mathrm{const}$). Дополнительный интеграл

$$\sum_j [M_j^2-2\mu(a_j+\nu)M_jp_j]+\mu^2[(a_2-a_3)^2+\nu'']p_1^2+\ldots \qquad (1.209)$$

(параметры ν, ν', ν'' — несущественные).

§ 4. Уравнение Гамильтона — Якоби. Метод разделения переменных — классический метод интегрирования и нахождения переменных действие — угол

Теория вполне интегрируемых гамильтоновых систем, изложенная в предыдущем параграфе, возникла как обобщение *метода Гамильтона—Якоби* интегрирования канонических уравнений.

Будем здесь рассматривать фазовое пространство R^{2n} с каноническими координатами $(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n)$ (см. (1.19)). Гамильтонова система с гамильтонианом $H=H(x,p)$ имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^i&=\frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i&=-\frac{\partial H}{\partial x^i}\end{aligned}\right\} i=1, \ldots, n. \qquad (1.210)$$

Рассмотрим каноническое преобразование (т. е. сохраняющее скобки Пуассона (1.19)) от координат (x, p) к координатам (X, P) вида

$$p_i=\frac{\partial S}{\partial x^i}, \quad X^i=\frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad S=S(x, P), \qquad (1.211)$$

$$dS=p_idx^i+X^idP_i, \quad dp_i\wedge dx^i=dP_i\wedge dX^i. \qquad (1.212)$$

В новых координатах система (1.210) запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}^i&=\frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i&=-\frac{\partial K}{\partial X^i}\end{aligned}\right\} i=1, \ldots, n, \qquad (1.213)$$

где гамильтониан $K=K(X, P)$ имеет вид:

$$K(X, P)=H(x(X, P), p(X, P)). \qquad (1.214)$$

Идея метода Гамильтона—Якоби заключается в том, чтобы подобрать преобразование (1.211), (1.214) так, чтобы в новых координатах гамильтониан K не зависел бы от X: $K=K(P)$. В этом случае переменные $P_1, \dots, P_n$ будут являться, очевидно, переменными типа действия, а сопряженные переменные $X^1, \dots, X^n$ — соответствующие углы, т. е. система (1.213) запишется в виде (1.191)

$$\left.\begin{aligned} \dot{X}^i &= \frac{\partial K(P)}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= 0 \end{aligned}\right\} i=1, \dots, n. \tag{1.215}$$

Таким образом, задача интегрирования канонических уравнений (1.210) сводится к отысканию функции $S(x, P)$, удовлетворяющей *уравнению Гамильтона—Якоби*

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right)=K, \tag{1.216}$$

зависящего от n параметров $P_1, \dots, P_n$ (нужно, чтобы функция $S=S(x^1, \dots, x^n, P_1, \dots, P_n)$ была общим интегралом уравнения (1.216), т. е. $\det(\partial^2 S/\partial x^i \partial P_j) \neq 0$ [1]).

Единственный метод интегрирования уравнения Гамильтона—Якоби, применявшийся с успехом в классической аналитической механике, — это *метод разделения переменных*. Именно, пусть уравнение (1.216) Гамильтона—Якоби записывается в виде

$$h\left(f_1\left(x^1, \frac{\partial S}{\partial x^1}\right), \dots, f_n\left(x^n, \frac{\partial S}{\partial x^n}\right), K\right)=0, \tag{1.217}$$

где $f_i(x^i, p_i)$ — некоторые функции. В этом случае его общий интеграл можно искать в виде

$$S=S_1(x^1; c_1)+S_2(x^2; c_2)+\dots+S_n(x^n; c_n), \tag{1.218}$$

где уравнения для функций $S_1, \dots, S_n$ запишутся в виде

$$f_i\left(x^i, \frac{\partial S_i}{\partial x^i}\right)=c_i, \quad i=1, \dots, n, \tag{1.219}$$

и очевидным образом интегрируются в квадратурах. Зависимость гамильтониана от новых переменных $H(x, p)=K(c_1, \dots, c_n)$ определяется уравнением

$$h(c_1, \dots, c_n, K)=0. \tag{1.220}$$

Переменные

$$c_i=\varphi_i(x_i, p_i), \ i=1, \dots, n, \tag{1.221}$$

если они определены глобально, будут переменными типа действия. Соответствующие переменные типа углов вычисляются по формулам (1.211).

Пример 1. *Геодезические на эллипсоиде* (Якоби, 1839). Пусть эллипсоид имеет вид:

$$\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+\frac{x_3^2}{a_3}=1, \quad a_1>a_2>a_3>0. \tag{1.222}$$

Эллиптические координаты λ_1, λ_2, λ_3 в пространстве определяются как корни уравнения

$$\frac{x_1^2}{a_1-\lambda}+\frac{x_2^2}{a_2-\lambda}+\frac{x_3^2}{a_3-\lambda}=1, \qquad (1.223)$$

причем $\lambda_3<a_3<\lambda_2<a_2<\lambda_1<a_1$. Эллипсоид (1.222) получается при $\lambda_3=0$. Гамильтониан свободного движения материальной точки единичной массы по поверхности эллипсоида совпадает с кинетической энергией (метрикой) и имеет вид:

$$H=\frac{2}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{(a_1-\lambda_1)(\lambda_1-a_2)(\lambda_1-a_3)}{\lambda_1}p_1^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)(\lambda_2-a_3)}{\lambda_2}p_2^2\right], \qquad (1.224)$$

где

$$p_j=(-1)^{j+1}(\lambda_1-\lambda_2)\frac{\lambda_j\dot{\lambda}_j}{4(a_1-\lambda_j)(a_2-\lambda_j)(a_3-\lambda_j)}, \quad j=1,\ 2. \quad (1.225)$$

Переменные разделились. Нетрудно показать [81], что интегрирование уравнений движения сводится к гиперэллиптическим квадратурам (рода 2)

$$\frac{d\lambda_1}{\sqrt{R(\lambda_1)}}=\frac{dt}{\lambda_1-\lambda_2}, \quad \frac{d\lambda_2}{\sqrt{R(\lambda_2)}}=\frac{dt}{\lambda_2-\lambda_1}, \qquad (1.226)$$

где

$$R(\lambda)=-\frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)}{\lambda}, \qquad (1.227)$$

$a_3<\alpha<a_1$ — произвольная постоянная. Эти уравнения проинтегрированы в 1861 г. Вейерштрассом (K. Weierstrass) в тэта-функциях двух переменных. Решение уравнения Гамильтона—Якоби имеет вид:

$$S(\lambda_1,\ \lambda_2;\ \alpha,\ E)=\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{2}}\int\frac{\lambda_1-\alpha}{\sqrt{R(\lambda_1)}}\,d\lambda_1+\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{2}}\int\frac{\lambda_2-\alpha}{\sqrt{R(\lambda_2)}}\,d\lambda_2, \quad (1.228)$$

где $E=H$ — энергия. Отсюда находятся переменные типа углов по формулам (1.211)

$$\varphi_\alpha=\frac{\partial S}{\partial\alpha}, \quad \varphi_E=\frac{\partial S}{\partial E}. \qquad (1.229)$$

Замена (1.229) $(\lambda_1,\ \lambda_2)\mapsto(\varphi_\alpha,\ \varphi_E)$ есть преобразование Абеля, отвечающее гиперэллиптической римановой поверхности корня $\sqrt{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-a_1)(\lambda-a_2)(\lambda-a_3)}$ (рода 2; см. гл. 2 ниже). Поэтому инвариантные торы здесь продолжаются в комплексную область и являются абелевыми.

Вопрос о разделении переменных для гамильтоновых систем интенсивно изучался во второй половине прошлого века (см. библиографию в [126]). Был установлен следующий критерий (Леви—Чивита (T. Levi-Civita), [125]): система с гамильтонианом $H(x, p)$ интегрируема методом разделения переменных в данной системе координат, если и только если функция H удовлетворяет следующей системе уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial x^k}-\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial x^k}\frac{\partial^2 H}{\partial x^j \partial p_k}-\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial x^k}+$$
$$+\frac{\partial H}{\partial x^j}\frac{\partial H}{\partial x^k}\frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k}=0, \tag{1.230}$$

$1\leqslant j<k\leqslant n$ (суммирования по повторяющимся индексам нет). Применение этого критерия к исследованию интегрируемости (по Гамильтону—Якоби) гамильтоновых систем является нетривиальной задачей; продвижения в некоторых специальных классах гамильтонианов были получены в [105], [107].

В заключение этого параграфа отметим, что указанная выше система С. В. Ковалевской методом разделения переменных не интегрируется, и переменные действие-угол для нее не были найдены до самого последнего времени (см. ниже гл. 2).

Глава 2

СОВРЕМЕННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

§ 1. Коммутационные представления эволюционных систем

Алгебраический механизм, лежащий в основе процедуры интегрирования уравнения КдФ с быстроубывающими по x начальными условиями, предложенной в знаменитой работе Гарднера, Грина (J. Green), Крускала и Миуры (R. M. Miura) [114] был прояснен в работе Лакса [124]. Было замечено, что это уравнение

$$4u_t=6uu_x+u_{xxx} \tag{2.1}$$

эквивалентно условию коммутации

$$\left[L, \frac{\partial}{\partial t}-A\right]=0\Leftrightarrow\frac{\partial L}{\partial t}=[A, L] \tag{2.2}$$

вспомогательных линейных дифференциальных операторов

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x, t); \quad A=\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{3}{4}u_x. \tag{2.3}$$

Начиная с этой работы, все схемы продуцирования новых уравнений, к которым применим метод обратной задачи, были основаны на различных обобщениях *коммутационного уравнения* (2.2).

Первым и наиболее естественным шагом является обобщение уравнения (2.2) на случай, когда L и A — произвольные дифференциальные операторы

$$L=\sum_{i=0}^{n} u_i(x,\ t)\frac{\partial^i}{\partial x^i};\quad A=\sum_{i=0}^{m} v_i(x,\ t)\frac{\partial^i}{\partial x^i} \tag{2.4}$$

с матричными $(l\times l)$ или скалярными коэффициентами.

Новые физически важные уравнения, к которым применим метод обратной задачи, были обнаружены именно на этом пути в работах В. Е. Захарова—А. Б. Шабата [47], [48], Лэма (G. L. Lamb) [122].

Пусть u_n и v_m — постоянные невырожденные диагональные матрицы с различными элементами на диагоналях. С помощью сопряжения подходящей матричной функцией $g(x,t):L\to gLg^{-1}$ и $A\to gAg^{-1}$ можно всегда добиться того, чтобы $u_{n-1}^{\alpha\alpha}=0$, $v_{m-1}^{\alpha\alpha}=0$, $\alpha=1,\ldots,l$. Уравнения (2.2) представляют собой систему $n+m$ матричных уравнений на коэффициенты операторов L и A. Оказывается, что из первых m уравнений, полученных приравниванием нулю коэффициентов при $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$, $k=n,\ldots$ $\ldots, n+m-1$, последовательно находятся $v_j(x,t)$, матричные элементы которых являются дифференциальными полиномами от матричных элементов $u_i^{\alpha\beta}(x,t)$ и некоторых констант h_j^{α}; $\alpha,\beta=$ $=1,\ldots,l$. Подставляя полученные выражения в оставшиеся n уравнений, получим систему эволюционных уравнений лишь на коэффициенты оператора L, которые и называются уравнениями типа Лакса. Существует множество схем (см., например, [24], [44], [45], [48], [49], [57], [92]), которые тем или иным способом реализуют редукцию общего уравнения (2.2) к уравнениям на коэффициенты оператора L.

Система (2.2) представляет собой пучок *уравнений Лакса*, параметризованных константами h_j^{α}. Например, если $(l=1)$

$$L=\partial^2+u,\quad A=\partial^3+v_1\partial+v_2,\quad \partial=\partial/\partial x, \tag{2.5}$$

то

$$v_1=\frac{3}{2}u+h_1,\quad v_2=\frac{3}{4}u_x+h_2. \tag{2.6}$$

и уравнение (2.2) эквивалентно пучку уравнений

$$4u_t=u_{xxx}+6uu_x+4h_1u_x. \tag{2.7}$$

Приведем несколько простейших примеров уравнений типа Лакса.

Пример 1 ([43]). Если $(l=1)$

$$L=\partial^3+\frac{3}{2}u(x,t)\partial+w(x,t),\quad A=\partial^2+u(x,t), \tag{2.8}$$

то уравнение (2.2) приводит к системе

$$\frac{3}{4} u_t = w_x - \frac{3}{4} u_{xx}, \tag{2.9}$$

$$w_t = w_{xx} - u_{xxx} - \frac{3}{2} u u_x. \tag{2.10}$$

Исключая из этих уравнений w, придем для $u(x, t)$ к уравнению Буссинеска (J. V. Boussinesq)

$$3u_{tt} + (u_{xxx} + 6uu_x)_x = 0. \tag{2.11}$$

Двумерные системы, допускающие представление типа Лакса (P. D. Lax) (2.2), впервые были обнаружены в [31], [48]. Важным примером таких систем является «двумеризованное» уравнение КдФ — уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП)

$$\begin{cases} \frac{3}{2} u_y + \frac{3}{2} u_{xx} - 2w_x = 0, \\ w_x - u_t + u_{xxx} + \frac{3}{2} u u_x - w_{xx} = 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

В этом случае

$$L = -\partial_y + \partial_x^2 + u(x, y, t), \quad A = \partial_x^3 + \frac{3}{2} u(x, y, t)\partial_x + \\ + w(x, y, t). \tag{2.13}$$

Замечание. Ряд авторов показал, что обычное представление Лакса для двумерных систем возможно только для операторов, содержащих дифференцирования не выше первого порядка по одной из переменных. Например, для двумерного оператора Шрёдингера $L = \partial_x^2 + \partial_y^2 + u(x, y)$ нет ни одного нетривиального уравнения типа Лакса. Правильный (нетривиальный) аналог уравнений типа Лакса для 2+1-систем был позднее найден в работах [69], [36], [20].

Пример 2 ([47]). Нелинейное уравнение Шрёдингера (НШ$_\pm$)

$$ir_t = r_{xx} \pm |r|^2 r. \tag{2.14}$$

Операторы L и A в этом случае являются матричными и равны

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & r \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad q = \pm \bar{r}, \tag{2.15}$$

$$A = i \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & r \\ q & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} 0 & r \\ q & 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} rq & 0 \\ 0 & -rq \end{pmatrix} \right]. \tag{2.16}$$

Пример 3. Уравнения трехволнового взаимодействия

$$u_{13t} + v_{13} u_{13x} = i\varepsilon u_{12} u_{23}; \quad u_{12t} + v_{12} u_{12x} = i\varepsilon u_{13} \bar{u}_{23},$$

$$u_{23t} + v_{23} u_{23x} = i\varepsilon u_{13} \bar{u}_{12}, \quad u_{ij} = u_{ij}(x, t), \quad v_{ij} = \mathrm{const}. \tag{2.17}$$

Операторы L и A являются матричными (3×3) и равны

$$L = I\partial/\partial x + [I, Q], \quad A = J\partial/\partial x + [J, Q],$$

$$I_{ij} = a_i\delta_{ij}, \quad a_{i+1} > a_i, \quad J_{ij} = b_i\delta_{ij}, \tag{2.18}$$

$$Q_{ij} = \overline{Q}_{ji} = -iu_{ij}\sqrt{a_j - a_i}, \quad j > i.$$

$$v_{ij} = \frac{a_i b_j - b_i a_j}{a_i - a_j}. \tag{2.19}$$

Пример 4. Цепочка Тоды ((M. Toda) [70], [111], [112]) и разностный аналог уравнения КдФ [70]. Метод обратной задачи применим и к некоторым дифференциально-разностным системам. Если L и A — разностные операторы вида

$$L\psi_n = c_n\psi_{n+1} + v_n\psi_n + c_{n-1}\psi_{n-1}, \tag{2.20}$$

$$A\psi_n = \frac{c_n}{2}\psi_{n+1} - \frac{c_{n-1}}{2}\psi_{n-1}, \tag{2.21}$$

то уравнение (2.2) приводит к уравнениям

$$2\dot{c}_n = c_n(v_{n+1} - v_n), \tag{2.22}$$

$$\dot{v}_n = c_n^2 - c_{n-1}^2, \tag{2.23}$$

которые, если положить $c_n = \exp\left(\frac{1}{2}(x_{n+1} - x_n)\right)$, $v_n = \dot{x}_n$, совпадают с уравнениями движения, так называемой цепочки Тоды — гамильтоновой системы частиц на прямой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_n p_n^2 + \sum_n \exp(x_{n+1} - x_n). \tag{2.24}$$

Если в (2.20) положить $v_n \equiv 0$ и в качестве A выбрать

$$A\psi_n = \frac{1}{2}[c_n c_{n+1}\psi_{n+1} - c_{n-1}c_{n-2}\psi_{n-2}], \tag{2.25}$$

то (2.20) приводит к разностному аналогу уравнения КдФ

$$\frac{d}{dt}\tilde{c}_n = \tilde{c}_n(\tilde{c}_{n+1} - \tilde{c}_{n-1}), \quad \tilde{c}_n = c_n^2. \tag{2.26}$$

С каждым оператором L связана целая *иерархия уравнений типа Лакса*, которые представляют собой редукцию к уравнениям на коэффициенты L уравнений (2.2) с операторами A разных порядков. Одним из важнейших фактов в теории интегрируемых уравнений является коммутативность всех уравнений, входящих в общую иерархию.

Для уравнения КдФ соответствующие уравнения называются «высшими уравнениями КдФ». Они имеют вид

$$u_\tau = \sum_{k=1}^{n} h_k Q_k(u, \ldots, u^{(2k+1)})$$

и являются условием коммутативности оператора Штурма—Лиувилля с операторами $\partial/\partial t - A$, где A имеет порядок $2n+1$.

В работе [76] для высших уравнений КдФ было впервые использовано представление отличного от (2.2) типа — представление типа Лакса на матричных функциях, зависящих от дополнительного спектрального параметра.

Для общего уравнения (2.2) такое λ-представление строится следующим образом.

Уравнение

$$Ly=\lambda y \tag{2.27}$$

эквивалентно матричному уравнению первого порядка

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}-U_L(x,\ t,\ \lambda)\right]Y(x,\ t,\ \lambda)=0, \tag{2.28}$$

где U_L — матрица размерности nl (n — порядок L, l — размерность матричных коэффициентов L). Вектор Y представляет собой столбец, составленный из векторов $\partial^i/\partial x^i y(x,\ t,\ \lambda)$; $i=0,\ \ldots,\ n-1$.

Матрица U_L имеет следующую блочную структуру

$$U_L=u_n^{-1}\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0\ \ldots & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1\ \ldots & 0, & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0, & 0, & & 0, & 1 \\ \lambda-u_0, & -u_1, & \ldots & -u_{n-2}, & -u_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Действуя оператором A на координаты вектора Y и используя (2.27) для выражения $\partial^n/\partial x^n y$ через младшие производные и параметр λ, получим, что на пространстве решений (2.27) уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-A\right)y(x,\ t,\ \lambda)=0 \tag{2.30}$$

эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-V_A(x,\ t,\ \lambda)\right)Y(x,\ t,\ \lambda)=0. \tag{2.31}$$

Матричные элементы V_A полиномиально зависят от λ, матричных элементов $u_i(x,\ t)$ и их производных.

Из совместности уравнений (2.27) и (2.30) следует совместность (2.28) и (2.31). Отсюда

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}-U_L,\ \frac{\partial}{\partial t}-V_A\right]=0. \tag{2.32}$$

Для уравнения КдФ матрицы U_L, V_A имеют вид:

$$U_L=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda-u & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.33}$$

$$V_A=\begin{pmatrix} -\frac{u_x}{4}, & \lambda+\frac{u}{2} \\ \lambda^2-\frac{u\lambda}{2}-\frac{u^2}{2}-\frac{u_{xx}}{4}, & \frac{u_x}{4} \end{pmatrix}. \tag{2.34}$$

Впоследствии уравнение (2.32), где U и V — уже произвольные рациональные функции параметра λ, было предложено в [49] как общая схема продуцирования одномерных интегрируемых уравнений. Начало этой программы восходит к работе [93], в которой для интегрирования уравнения sine-Gordon впервые был введен пример *рационального пучка*.

Пусть $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ — произвольные матричные функции, зависящие рационально от параметра λ:

$$\begin{gathered} U(x, t, \lambda)=u_0(x, t)+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{h_k} u_{ks}(x, t)(\lambda-\lambda_k)^{-s}, \\ V(x, t, \lambda)=v_0(x, t)+\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{d_r} v_{rs}(x, t)(\lambda-\mu_r)^{-s}. \end{gathered} \tag{2.35}$$

Условие совместимости линейных задач

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial}{\partial x}-U(x, t, \lambda)\right)\Psi(x, t, \lambda)=0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}-V(x, t, \lambda)\right)\Psi(x, t, \lambda)=0 \end{gathered} \tag{2.36}$$

представляет собой *уравнение нулевой кривизны*

$$U_t-V_x+[U, V]=0, \tag{2.37}$$

которое должно выполняться при всех λ. Это уравнение эквивалентно системе $1+\sum_k h_k+\sum_r d_r$ матричных уравнений на неизвестные функции $u_{ks}(x, t)$, $v_{rs}(x, t)$, $u_0(x, t)$, $v_0(x, t)$. Эти уравнения возникают при приравнивании нулю всех сингулярных членов левой части (2.37) в точках $\lambda=\lambda_k$, $\lambda=\mu_r$, а также свободного члена, равного $u_{0t}-v_{0x}+[u_0, v_0]$.

Число уравнений меньше на одно матричное уравнение числа неизвестных матричных функций. Эта недоопределенность связана с «калибровочной симметрией» уравнений (2.37). Если $g(x, t)$ — произвольная невырожденная матричная функция, то преобразование

$$\begin{gathered} U\to g_x g^{-1}+gUg^{-1}, \\ V\to g_t g^{-1}+gVg^{-1}, \end{gathered} \tag{2.38}$$

называемое «калибровочным», переводит решения (2.37) в решения того же уравнения.

Выбор условий на матрицы $U(x, t, \lambda)$, $V(x, t, \lambda)$, совместных с уравнениями (2.37) и разрушающих калибровочную симметрию, называется фиксацией калибровки. Простейшей калибровкой являются условия $u_0(x, t) = v_0(x, t) = 0$.

Как и в рассмотренном выше случае уравнений коммутации дифференциальных операторов, уравнения (2.37) являются, по существу, производящими для целого семейства интегрируемых систем. Если полюса U и V совпадают, то эти уравнения могут быть редуцированы к пучку уравнений, параметризованных произвольными константами, на коэффициенты лишь $U(x, t, \lambda)$. При этом, меняя кратности полюсов V, будем получать иерархии коммутирующих потоков, связанных с $U(x, t, \lambda)$.

Важным при выделении из (2.37) некоторых специальных уравнений является вопрос о выделении инвариантных подмногообразий уравнения (2.37). Эта проблема сводится к описанию орбит коприсоединенного представления алгебры токов [94], в рамках которой естественно вводится гамильтонова теория уравнений нулевой кривизны (см. [25], [30], [85], [110]).

Оставляя в стороне дальнейший анализ вопросов редукции и калибровочной эквивалентности систем, который можно найти в работах [30], [45], [48], [94], [110], приведем два простейших примера.

Если U и V имеют по одному несовпадающему полюсу

$$U = \frac{u(\xi, \eta)}{1-\lambda}, \quad V = \frac{v(\xi, \eta)}{\lambda + 1}, \tag{2.39}$$

то уравнения (2.37) (после замены $x \to \xi = x' - t'$; $t \to \eta = x' + t'$) приводят к уравнениям главного *кирального поля* ([45], [136])[1]

$$u_\eta + \frac{1}{2}[u, v] = 0, \quad v_\xi = \frac{1}{2}[u, v]. \tag{2.40}$$

Здесь $u(\xi, \eta)$, $v(\xi, \eta)$ являются токами кирального поля

$$u = G_\xi G^{-1}; \quad v = G_\eta G^{-1}. \tag{2.41}$$

Уравнение (2.40) дает

$$2G_{\xi\eta} = G_\xi G^{-1} G_\eta + G_\eta G^{-1} G_\xi. \tag{2.42}$$

Последние уравнения являются лагранжевыми с лагранжианом (1.68) (токам A_μ в обозначениях (1.68) соответствуют, как видно из (2.41), u и v).

Как было замечено в [23], представление (2.37), где U и V даются формулами (2.39), одновременно дает решения уравнений движения главного кирального поля с «многозначным добавком». Если в определение соответствующего лагранжиана (1.72) ввести константу связи $\varkappa$, т. е.

---

[1] Интересно, что впервые этот пример вместе с представлением нулевой кривизны был открыт в замечательной (но забытой) классической работе Гарнье (J.R.E.L.M. Garnier) [115].

$$\delta S = \delta S_0 + \varkappa \Omega_1,$$

то уравнения движения в терминах токов запишутся в виде

$$\partial_\xi v = \frac{1+\varkappa}{2}[v, u], \quad \partial_\eta u = \frac{1-\varkappa}{2}[v, u]. \qquad (2.43)$$

В методе обратной задачи, как будет подчеркиваться неоднократно в дальнейшем, путь построения решений уравнений (2.37) идет через построение с помощью различных схем («одевания», алгебро-геометрических и т. д.) функций $\psi(\xi, \eta, \lambda)$, которые по своему построению удовлетворяют уравнениям (2.36) с некоторыми U, V (которые автоматически будут удовлетворять (2.37)). В рассматриваемом случае после того, как построена тем или иным способом функция $\psi(\xi, \eta, \lambda)$, искомые решения уравнений движения определяются формулой

$$G(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta, \varkappa).$$

В качестве второго примера приведем уравнение sine-Gordon [89], [93]

$$u_{\xi\eta} = 4 \sin u, \qquad (2.44)$$

которое возникло в теории поверхностей постоянной отрицательной кривизны. По числу приложений (в теории сверхпроводимости, в теориях квазиодномерных проводников, процессов образования пленок на кристаллических подложках, в теории поля), которые приводят к уравнению (2.44), это уравнение относится к числу важнейших в современной математической физике.

Матрицы U и V имеют, как и в общем случае главного кирального поля, по одному полюсу

$$U(\xi, \eta, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{iu_\xi}{2} & 1 \\ \lambda^{-1} & -\frac{iu_\xi}{2} \end{pmatrix}, \qquad (2.45)$$

$$V(\xi, \eta, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda e^{-iu} \\ e^{iu} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.46)$$

Надо отметить, что автоматическому обобщению уравнений (2.37) на случай матриц U и V, спектральный параметр которых определен на алгебраической кривой Γ рода большего нуля (случаю рациональных пучков отвечает $g=0$), препятствует теорема Римана—Роха (G. F. B. Riemann—G. Roch).

Действительно, пусть $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ — мероморфные функции на Γ, имеющие полюса суммарной кратности N и M. По теореме Римана—Роха [138] число независимых переменных (т. е. размерность пространства матричных функций с такими же, как у U и V, полюсами) равна $l^2(N-g+1)$ для U и $l^2(M-g+1)$ для V. Коммутатор $[U, V]$ имеет полюса суммарной кратности $N+M$. Отсюда уравнения (2.37) эквивалентны

$l^2(N+M-g+1)$ уравнениям. С учетом калибровочной эквивалентности число уравнений всегда больше числа переменных.

Имеется два пути обойти указанное препятствие. Один из них был предложен в работах [67], [68], где у матриц U и V допускались, кроме полюсов, неподвижных относительно x и t, gl полюсов, определенным образом зависящих от x, t. Было показано, что при этом число уравнений с учетом калибровочной эквивалентности равно числу независимых переменных, которыми (как и в рациональном случае) являются сингулярные части U и V в неподвижных полюсах.

Примером такого уравнения является

$$c_t = \frac{1}{4} c_{xxx} + \frac{3}{8c_x}(1 - c_{xx}^2) - \frac{1}{2} Q(c) c_x^2. \tag{2.47}$$

Здесь величина $Q = \frac{\partial \Phi}{\partial c} + \Phi^2$ определяется через

$$\Phi(c, y) = \zeta(-2c) + \zeta(c - y) + \zeta(c + y)$$

и не зависит, как легко проверить, от y (ζ—ζ-функция Вейерштрасса [100]).

Это уравнение вместе со следующей парой с эллиптическим спектральным параметром (*эллиптическим пучком*) было получено в [67]

Матрица U равна

$$U = A_1\zeta(\lambda - \gamma_1) + B_1\zeta(\lambda - \gamma_2) +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \zeta(\lambda) + A_1\zeta(\gamma_1) + B_1\zeta(\gamma_2) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$A_1 = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для V имеем формулы

$$V = A_2\zeta(\lambda - \gamma_1) + B_2\zeta(\lambda - \gamma_2) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \wp(\lambda) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u}{2} & 0 \end{pmatrix} \zeta(\lambda) + D,$$

где

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, & \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} \\ \frac{\alpha_1 u}{2(\alpha_1 - \alpha_2)}, & \frac{u}{2(\alpha_1 - \alpha_2)} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}, & \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \\ \frac{\alpha_2 u}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}, & \frac{u}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} \end{pmatrix}$$

и

$$D = A_2\zeta(\gamma_1) + B_2\zeta(\gamma_2) + \begin{pmatrix} w_1 & \frac{u}{2} \\ w_2 & -w_1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (2.37) эквивалентны системе уравнений на функции γ_i, α_i, w_i, u. Последовательно исключая из этой системы переменные w_i, которые равны

$$w_1 = \frac{1}{2(\alpha_1 - \alpha_2)} (\wp(\gamma_1) - \wp(\gamma_2)) - \frac{u_x}{4},$$

$$w_2 = w_{1x} - \frac{u^2}{2} + \wp(\gamma_1) + \wp(\gamma_2),$$

а затем α_i (формулы для которых мы здесь опустим) и u (см. (2.48)), придем в конце к уравнению (2.47), где

$$\gamma_1 = c(x, t) + y, \ \gamma_2 = y - c(x, t) + c_0.$$

Каждое решение уравнения (2.47) определяет по формуле

$$8u(x, y, t) = (c_{xx}^2 - 1)\, c_x^{-2} + 8\Phi c_{xx} + \\ + 4c_x^2 (\partial\Phi/\partial c - \Phi) - 2c_{xxx} c_x^{-1} \tag{2.48}$$

решение уравнения Кадомцева—Петвиашвили (КП).

Уравнение (2.47) описывает и деформацию коммутирующих линейных дифференциальных операторов порядков 4 и 6. Такой оператор порядка 4 имеет вид:

$$\mathcal{L} = (\partial^2 + u)^2 + c_x (\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1)) \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} (c_x (\wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_2))) - \\ - \wp(\gamma_2) - \wp(\gamma_1). \tag{2.49}$$

Уравнение (2.47), как показано в [84], единственное из уравнений вида

$$c_t = \mathrm{const} \cdot c_{xxx} + f(c, c_x, c_{xx}),$$

обладающих «скрытой симметрией», не сводящееся к обычному КдФ преобразованиями «типа Миуры» $w = w(c, c_x, \ldots)$.

Подстановкой $v = \zeta(c)$ уравнение (2.47) сводится к алгебраической форме

$$v_t = \frac{1}{4} v_{xxx} + \frac{3}{8v_x} (v_{xx}^2 - P_3(v)), \tag{2.50}$$

$$P_3(v) = 4v^3 - g_2 v - g_3.$$

Второй путь введения нерационального спектрального параметра основан на выборе специального вида матриц U и V и успешно реализован лишь в некоторых примерах на эллиптических кривых Γ ($g = 1$). Физически наиболее интересным примером таких уравнений является уравнение Ландау—Лифшица

$$S_t = S \times S_{xx} + S \times JS, \tag{2.51}$$

где S — трехмерный вектор единичной длины, $|S| = 1$, а $J_{\alpha\beta} = J_\alpha \delta_{\alpha\beta}$ — диагональная матрица. Как показано в работах [13], [137], уравнение (2.51) является условием совместности линейных уравнений (2.35), (2.36), где (2×2) матрицы U и V есть

$$U = -i \sum_{\alpha=1}^{3} w_\alpha(\lambda)\, S_\alpha(x, t)\, \sigma_\alpha, \tag{2.52}$$

$$V = -i \sum_{\alpha, \beta, \gamma} w_\alpha(\lambda)\, \sigma_\alpha S_\beta S_{\gamma x} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} - 2i \sum_\alpha a_\alpha(\lambda)\, S_\alpha \sigma_\alpha,$$

где σ_α — матрицы Паули (W. Pauli), а

$$w_1 = \frac{\rho}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad w_2 = \rho \frac{\operatorname{dn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)}, \quad w_3 = \rho \frac{\operatorname{cn}(\lambda, k)}{\operatorname{sn}(\lambda, k)},$$

$$a_1 = -w_2 w_3, \quad a_2 = -w_3 w_1, \quad a_3 = -w_1 w_2,$$

(где $\operatorname{sn}(\lambda, k)$, $\operatorname{cn}(\lambda, k)$, $\operatorname{dn}(\lambda, k)$ — эллиптические функции Якоби [100]).

Параметры J_α даются соотношениями

$$k = \sqrt{\frac{J_2 - J_1}{J_3 - J_1}}, \quad \rho = \frac{1}{2}\sqrt{J_3 - J_1}, \quad 0 < k < 1. \tag{2.53}$$

Другим интересным примером являются уравнения анизотропного $O(3)$-поля [92]

$$u_\xi = [u, Jv], \quad v_\eta = [v, Ju], \tag{2.54}$$

где u, v — токи: $u = g_\eta g^{-1}$, $v = g_\xi g^{-1}$.

Лагранжиан этой модели равен

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\int \operatorname{Sp}(g_\xi g^{-1} J g_\eta g^{-1})\, dx. \tag{2.55}$$

Уравнения (2.54) эквивалентны (2.37), где U и V тесно связаны с парой для уравнения Ландау—Лифшица и так же, как и последняя, содержат эллиптическую зависимость от спектрального параметра.

В течение длительного времени особым случаем выглядело коммутационное представление

$$\dot{L} = [M, L] \tag{2.56}$$

типа Лакса для уравнений движения *системы Мозера—Калоджеро* (J. Moser—F. Calogero).

Это система частиц на прямой x_n с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} p_n^2 + 2\sum_{i<j} \wp(x_i - x_j), \tag{2.57}$$

где $\wp$ — функция Вейерштрасса. Для этой системы L и M матрицы, вообще не зависящие от спектрального параметра, имеют вид:

$$L_{ij} = p_i \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij})\, \varphi(x_i - x_j), \tag{2.58}$$

$$M_{ij} = \left(\sum_{l \neq i} z(x_i - x_l)\right)\delta_{ij} - (1 - \delta_{ij})\, y(x_i - x_j), \tag{2.59}$$

$$y(\xi) = \varphi'(\xi), \quad z(\xi) = -\frac{\varphi''}{2\varphi}, \quad \varphi(\xi) = \frac{1}{\operatorname{sn}(\xi, k)}.$$

Представления (2.56) достаточны для построения интегралов системы (2.57), равных $J_k=\frac{1}{k}\operatorname{tr}L^k$, но недостаточны для явного построения переменных типа углов и интегрирования уравнений движения в терминах тэта-функций.

Как будет показано в § 5, матрицы L и M допускают введение спектрального параметра на эллиптической кривой, но при этом матричные элементы оказываются не мероморфными функциями, а имеющими экспоненциальную существенную особенность.

Приведенные примеры далеко не исчерпывают все системы, к которым применим метод обратной задачи. Ряд важных примеров будет приведен и детально разобран в последующих параграфах. Пока же в заключение параграфа подчеркнем еще раз те основные черты, которые характерны для систем, к которым применим метод обратной задачи.

Во-первых, все такие $(1+1)$ системы эквивалентны условию совместности (2.37) пары линейных задач (2.36), где $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ — мероморфные функции «спектрального параметра λ» (определенного в основных примерах на рациональной или эллиптической кривых). Во-вторых, каждое такое уравнение включается в целую иерархию коммутирующих с ним потоков. Коммутативность потоков позволяет ограничить исходную систему на множество стационарных точек любого другого потока, входящего в ту же иерархию.

Ограничение уравнения КдФ на стационарные точки «n-го высшего аналога» уравнения КдФ послужило отправной точкой в построении теории *конечнозонных операторов* Штурма—Лиувилля и в дальнейшем развитии алгебро-геометрических методов интегрирования, которые применимы ко всем системам, допускающим коммутационные представления.

Обзоры различных этапов развития теории *конечнозонного* или «алгебро-геометрического» *интегрирования* можно найти в [34], [35], [44], [58], [64], [68], [77].

Стационарные точки «n-ого высшего аналога уравнения КдФ» описываются обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} h_k Q_{2k+1}(u, \ldots, u^{(2k+1)})=0, \tag{2.60}$$

эквивалентным условию коммутации оператора Штурма—Лиувилля L и оператора L_1 порядка $2n+1$

$$[L, L_1]=0. \tag{2.61}$$

Эти уравнения, как было показано в [76], являются вполне интегрируемой гамильтоновой системой. В следующем параграфе будет изложена процедура интегрирования в *тэта-функциях Римана* как уравнения (2.61), так и ограничения на пространство его решений уравнения КдФ, а также интегрирования всех обобщений этих уравнений.

Для общих уравнений Лакса (2.2) условие, выделяющее алгебро-геометрические решения этих уравнений, имеет также вид (2.61), где L — оператор (2.4), входящий в исходную лаксову пару, а L_1 — вспомогательный оператор. Уравнение (2.61) описывает инвариантное подмногообразие исходного уравнения (2.2). Увеличивая порядок L_1, мы будем получать все возрастающее семейство таких подмногообразий, которые в ряде случаев (например, для уравнения КдФ) всюду плотны в пространстве периодических решений.

Задача классификации коммутирующих линейных дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами с чисто алгебраической точки зрения рассматривалась в работах Бурхнала и Чаунди (J. Burchnall, T. Chaundy) [104]. Ими было доказано, что для таких операторов найдется полином $Q(\lambda, \mu)$ от двух переменных такой, что

$$Q(L, L_1)=0. \tag{2.62}$$

В случае операторов взаимно простых порядков каждой точке кривой Γ, заданной уравнением $Q(\lambda, \mu)=0$, соответствует единственная с точностью до пропорциональности совместная собственная функция $\psi(x, P)$, $P=(\lambda, \mu)$, операторов L и L_1, т. е.

$$L\psi(x, P)=\lambda\psi(x, P), \quad L_1\psi(x, P)=\mu\psi(x, P). \tag{2.63}$$

Логарифмическая производная $\psi_x\psi^{-1}$ является мероморфной функцией на Γ, имеющей в общем положении g полюсов $\gamma_1(x), \ldots, \gamma_g(x)$, где g — род кривой Γ (остальные полюса не зависят от x).

В работе [104] было доказано, что коммутирующие операторы взаимно простых порядков однозначно определяются полиномом Q и заданием точек $\gamma_1(x_0), \ldots, \gamma_g(x_0)$ общего положения, хотя конечных формул получено не было. Программа эффективизации этих результатов была предложена Бейкером (H. Baker) [98], который указал на совпадение аналитических свойств $\psi(x, P)$ на Γ с теми, которые были положены в конце XIX века Клебшем и Горданом (R. Clebsch, P. A. Gordan) в основу определения аналога «экспоненты» на алгебраических кривых (см. в [99]). К сожалению, программа Бейкера реализована не была и эти работы были в течение долгого времени незаслуженно забыты.

Как уже говорилось, уравнения (2.61) описывают инвариантные подмногообразия уравнений типа Лакса. С этой точки зрения, эти уравнения были рассмотрены в работах [56], [57], в которых результаты 20-х годов были значительно эффективизированы и обобщены на случай операторов с матричными коэффициентами. Для коэффициентов коммутирующих скалярных операторов взаимно простых порядков в этих работах были найдены явные выражения через тэта-функции Римана, которые показали, что общие решения уравнений (2.61) в этом случае являются квазипериодическими функциями. Это позволило связать локальную теорию коммутирующих операторов со спектральной теорией Флоке (G. Floquet) операторов с периодическими коэффициентами, где собственная функция определяется нелокально — через оператор сдвига на период.

Первые продвижения в задаче классификации коммутирующих операторов произвольных порядков были получены в [29] на основе алгебраизации схемы работ [56], [57]. Полностью эта задача была решена в [65].

В общем случае решения (2.63) образуют r-мерное линейное пространство, где r — делитель порядков операторов L и L_1. Было доказано, что кольцо коммутирующих операторов $\mathscr{A}$ определяется кривой Γ и матричным дивизором ранга r. Восстановление коэффициентов операторов по этим данным сводится к линейной задаче Римана.

В отдельных случаях, как было показано в [66], можно исключить необходимость решения задачи Римана и получить явные формулы для операторов L и L_1 (формула для оператора L порядка 4, коммутирующего с оператором 6 порядка, была приведена выше (2.49)).

Приведем общее определение конечнозонных решений для уравнений нулевой кривизны (2.37), естественно обобщающее условие (2.61).

«*Конечнозонными*» или алгебро-геометрическими *решениями* уравнений, допускающих коммутационное представление, будут называться такие решения, для которых найдется матричная функция $W(x, t, \lambda)$, мероморфно зависящая от параметра λ (который определен на той же кривой, что и параметр в U и V) такая, что

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - U(x, t, \lambda), W(x, t, \lambda)\right] = 0, \qquad (2.64)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - V(x, t, \lambda), W(x, t, \lambda)\right] = 0. \qquad (2.65)$$

Уравнения (2.64), (2.65), которые в таком определении играют лишь вспомогательную роль в процессе интегрирования исходного уравнения (2.37), как будет видно в дальнейшем, имеют и самостоятельный интерес. К ним сводятся практически все интересные примеры конечномерных гамильтоновых систем, интегрируемых методом обратной задачи.

§ 2. Алгебро-геометрическая интегрируемость конечномерных λ-пучков

Основной целью этого параграфа является изложение процедуры интегрирования уравнений (2.64) и (2.65).

Обозначим через $\Psi(x, t, \lambda)$ фундаментальную матрицу решений уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-U(x, t, \lambda)\right)\Psi(x, t, \lambda)=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-V(x, t, \lambda)\right)\Psi(x, t, \lambda)=0, \tag{2.66}$$

нормированную условием

$$\Psi(0, 0, \lambda)=1. \tag{2.67}$$

Из (2.64) следует, что

$$W(x, t, \lambda)\Psi(x, t, \lambda) \tag{2.68}$$

также является решением уравнения (2.66). Любое решение (2.66) однозначно определяется своими начальными условиями и имеет вид $\Psi(x, t, \lambda)G(\lambda)$, где G не зависит от (x, t). Учитывая условия нормировки (2.67), получим, что

$$W(x, t, \lambda)\Psi(x, t, \lambda)=\Psi(x, t, \lambda)W(0, 0, \lambda). \tag{2.69}$$

Следовательно, коэффициенты характеристического уравнения

$$Q(\lambda\ \mu)=\det(W(x,\ t\ \lambda)-\mu\cdot 1)=0 \tag{2.70}$$

являются интегралами уравнения (2.64), (2.65). Они являются полиномами от матричных элементов W или, как было объяснено в предшествующем параграфе, дифференциальными полиномами от основных фазовых переменных — матричных элементов $U(x, t, \lambda)$.

В общем положении уравнение (2.70) определяет неособую *алгебраическую кривую* Γ (т. е. компактную риманову поверхность), каждой точке которой (т. е. паре (λ, μ)) отвечает единственный до пропорциональности собственный вектор h матрицы W

$$W(x, t, \lambda)h(x, t, \gamma)=\mu h(x, t, \gamma);\ \gamma=(\lambda, \mu)\in\Gamma. \tag{2.71}$$

Замечание. Понятие общего положения в данном вопросе не является вполне тривиальным. Хотя уровни интегралов уравнения (2.64), для которых собственные значения W тождественно по λ являются r кратно вырожденными (r обязан быть делителем l-размерности W), безусловно, имеют ненулевую коразмерность, но, как показывают результаты работ [30], [65], в процедуре восстановления по этим данным матриц U и V появляются дополнительные функциональные параметры. Развитие этого направления, приведшего к конструкции конечнозонных решений ранга $r>1$ для двумерных уравнений типа Кадомцева—Петвиашвили, зависящих от функциональных параметров (см. [66], [67], [68]), останется вне рамок этой статьи.

Нормируем вектор h, потребовав, например, чтобы $h_1(x, t, \gamma)=1$ или $\Sigma h_i(x, t, \gamma)=1$. В том и в другом случае все координаты $h_i(x, t, \gamma)$ являются рациональными функциями λ и μ, т. е. мероморфными функциями на кривой Γ.

Если $\Psi^j(x, t, \lambda)$ — столбцы матрицы $\Psi(x, t, \lambda)$, то из (2.69) и (2.71) следует, что вектор-функция

$$\psi(x, t, \gamma) = \sum_j h_j(0, 0, \gamma)\Psi^j(x, t, \lambda); \quad \gamma = (\lambda, \mu), \tag{2.72}$$

одновременно удовлетворяет уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - U(x, t, \lambda)\right)\psi(x, t, \gamma) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - V(x, t, \lambda)\right)\psi(x, t, \gamma) = 0, \tag{2.73}$$

$$W(x, t, \lambda)\psi(x, t, \gamma) = \mu\psi(x, t, \gamma). \tag{2.74}$$

Кривая Γ l-листно накрывает ту кривую $\hat{\Gamma}$, на которой определен параметр λ. Вне полюсов λ_i матриц U, V матрица $\Psi(x, t, \lambda)$ является голоморфной функцией параметра λ. Следовательно, вектор-функция $\psi(x, t, \gamma)$ мероморфна на Γ вне точек P_α — прообразов полюсов λ_i матриц U, V. (Заметим, что над точками λ кривая Γ может ветвиться.) Полюса $\psi(x, t, \gamma)$ совпадают с полюсами $h(0, 0, \gamma)$ и поэтому не зависят от x, t.

Ограничимся далее случаем *рационального пучка* (т. е. λ определено на обычной комплексной плоскости). Рассмотрим матрицу $H(x, t, \lambda)$, столбцами которой являются векторы $h(x, t, \gamma_i)$, где $\gamma_i = (\lambda, \mu_i)$ — прообразы точки λ на Γ при естественной проекции $\Gamma \to C$, $(\lambda, \mu) \to \lambda$.

Функция

$$r(x, t, \lambda) = (\det H(x, t, \lambda))^2 \tag{2.75}$$

не зависит от нумерации γ_i и поэтому является корректно определенной функцией λ. Так как $h_i(x, t, \gamma)$ мероморфны на Γ, то $r(x, t, \lambda)$ — рациональная функция λ. Она имеет двукратные полюса в образах полюсов $h(x, t, \gamma)$ и нули в точках, над которыми Γ ветвится. Число полюсов у r равно числу нулей. Отсюда

$$2N = \nu, \tag{2.76}$$

где ν — число точек ветвления с учетом кратности. Известна формула, связывающая род g гладкой кривой Γ, l-листно накрывающей C, с числом точек ветвления [138]

$$2g - 2 = \nu - 2l. \tag{2.77}$$

Следовательно, число полюсов у $h(x, t, \gamma)$, а значит, и у ψ равно

$$N = g + l - 1. \tag{2.78}$$

Найдем теперь поведение $\psi(x, t, \gamma)$ в окрестности точек P_α — прообразах полюсов $U(x, t, \lambda)$, $V(x, t, \lambda)$.

Из (2.71) и (2.74) вытекает, что векторы h и ψ пропорциональны

$$\psi(x, t, \gamma) = f(x, t, \gamma) h(x, t, \gamma). \tag{2.79}$$

Обозначим через $\tilde{\Psi}(x, t, \lambda)$ матрицу, столбцами которой являются векторы $\psi(x, t, \gamma_i)$, $\gamma_i = (\lambda, \mu_i)$, а через $F(x, t, \lambda)$ диагональную матрицу, $F_{ij}(x, t, \lambda) = f(x, t, \gamma_i)\delta_{ij}$. Тогда (2.79) можно записать в виде

$$\tilde{\Psi}(x, t, \lambda) = H(x, t, \lambda) F(x, t, \lambda). \tag{2.80}$$

Имеем

$$\begin{aligned} U(x, t, \lambda) &= \tilde{\Psi}_x \tilde{\Psi}^{-1} = H_x H^{-1} + H F_x F^{-1} H^{-1}, \\ V(x, t, \lambda) &= \tilde{\Psi}_t \tilde{\Psi}^{-1} = H_t H^{-1} + H F_t F^{-1} H^{-1}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что H регулярна и невырождена в точках λ_i. Отсюда получаем, что $F_x F^{-1}$ по модулю $O(1)$ совпадает с собственными числами сингулярной части $U(x, t, \lambda)$ в λ_i. Аналогично для $F_t F^{-1}$.

Таким образом, в окрестности P_α

$$f(x, t, \gamma) = \exp(q_\alpha(x, t, k_\alpha)) f_\alpha(x, t, \gamma). \tag{2.82}$$

Здесь $k_\alpha^{-1}(P)$ — локальный параметр в окрестности P_α, $k_\alpha^{-1}(P_\alpha) = 0$, $q_\alpha(x, t, k)$ полином по k, а f_α — регулярная функция в окрестности P_α.

Суммируя, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.1. Вектор функция $\psi(x, t, \gamma)$

1°. Мероморфна на Γ вне точке P_α. Ее дивизор полюсов не зависит от x, t. Если W — невырождена, то в общем положении кривая Γ неособа. Число полюсов ψ (с учетом кратности) равно $g + l - 1$, где g — род кривой Γ.

2°. В окрестности точек P_α $\psi(x, t, \gamma)$ имеет вид:

$$\psi(x, t, \gamma) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{s\alpha}(x, t) k_\alpha^{-1} \right) \exp(q_\alpha(x, t, k_\alpha)), \tag{2.83}$$

где первый сомножитель — есть разложение по локальному параметру $k_\alpha^{-1} = k_\alpha^{-1}(\gamma)$ голоморфного вектора, а $q_\alpha(x, t, k)$ — полином по k.

Основная идея алгебро-геометрического варианта обратной задачи состоит в восстановлении по перечисленным аналитическим свойствам вектора $\psi(x, t, \gamma)$. Специфика этих свойств гарантирует существование $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$, $W(x, t, \lambda)$ таких, что имеют место (2.66), (2.69). Следствием совместности этих систем являются уравнения (2.37), (2.64), (2.65).

Развитие основных этапов теории *конечнозонного интегрирования*, как уже говорилось, отражено подробно в [44] и обзорах [34], [35], [37], [58], [64], [68], [77], [109].

Прежде чем перейти к процедуре восстановления ψ, приведем необходимые сведения из классической алгебраической геометрии римановых поверхностей и теории тэта-функций.

Любая компактная *риманова поверхность* может быть задана уравнением

$$R(\lambda, \mu)=\Sigma a_{ij}\lambda^i\mu^j, \tag{2.84}$$

где i, j пробегают некоторый конечный набор целых чисел. В общем положении эта кривая будет неособой. Род этой кривой удобно находить с помощью так называемого многоугольника Ньютона, которым называется выпуклая оболочка целых точек с координатами i, j, для которых $a_{ij}\neq 0$ в (2.84). Род кривой равен числу целых точек, лежащих внутри многоугольника Ньютона.

Базис голоморфных дифференциалов (первого рода) на неособой кривой имеет вид:

$$\eta_{ij}=\frac{\lambda^i\mu^j}{R_\mu(\lambda, \mu)}d\lambda, \tag{2.85}$$

i, j принадлежат внутренности многоугольника Ньютона.

На кривой Γ можно выбрать базис циклов $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots$ $\ldots, b_g$ со следующими индексами пересечений

$$a_i \circ a_j=b_i \circ b_j=0, \quad a_i\circ b_j=\delta_{ij}. \tag{2.86}$$

Беря подходящие линейные комбинации, мы получим канонический базис голоморфных дифференциалов

$$\omega_1, \ldots, \omega_g, \tag{2.87}$$

нормированных условиями

$$\oint_{a_k} \omega_i=\delta_{ij}, \quad i, k=1, \ldots, g. \tag{2.88}$$

Матрица

$$B_{ik}=\oint_{b_k} \omega_i \tag{2.89}$$

называется матрицей периодов римановой поверхности Γ. Она симметрична и имеет положительно определенную мнимую часть. Единичные базисные векторы в C^g и векторы B_i с координатами B_{ik} порождают решетку в C^g, фактор по которой является $2g$-мерным тором $T^{2g}=J(\Gamma)$, называемым *многообразием Якоби* (или якобианом) кривой Γ.

Тэта-функция Римана поверхности Γ строится по матрице B

$$\theta(z)=\sum_{N\in Z^g}\exp(\pi i\langle BN, N\rangle+2\pi i\langle N, z\rangle),$$

$$z=(z_1,\ldots,z_g),\quad N=(N_1,\ldots,N_g), \tag{2.90}$$
$$\langle N, z\rangle = N_1z_1+\ldots+N_gz_g,$$
$$\langle BN, N\rangle = \sum B_{ij}N_iN_j.$$

Эта функция является целой. При сдвиге аргумента на вектор решетки она преобразуется по закону

$$\theta(z+N+BM)=\exp(-\pi i(\langle BM, M\rangle+2\langle z, M\rangle))\theta(z),$$
$$N,\ M\in Z^g. \tag{2.91}$$

Часто используются также тэта-функции с характеристиками

$$\theta[\alpha,\ \beta](z)=\exp(\pi i(\langle B\alpha, \alpha\rangle+2\langle z+\beta, \alpha\rangle))\theta(z+\beta+B\alpha),$$
$$\alpha,\ \beta\in R^g. \tag{2.92}$$

Характеристики $[\alpha, \beta]$, для которых все координаты α, β равны 0 или 1/2, называются полупериодами. Полупериод $[\alpha, \beta]$ четный, если $4\langle\alpha,\beta\rangle=0 \pmod 2$, и нечетный в противном случае.

Отображение Абеля римановой поверхности Γ в ее многообразие Якоби $A(P)=(A_1(P),\ldots, A_g(P))$ задается следующим образом

$$A_k(P)=\int_Q^P \omega_k, \tag{2.93}$$

где Q — фиксированная точка на Γ.

Дивизор на Γ — это формальная целочисленная комбинация точек на Γ,

$$D=\Sigma n_iP_i,\ n_i\in Z. \tag{2.94}$$

Для любой мероморфной на Γ функции f определен дивизор (f) ее нулей $P_1,\ldots,P_n$ и полюсов $Q_1,\ldots,Q_m$ (с кратностями $p_1,\ldots,p_n$, $q_1,\ldots,q_m$ соответственно)

$$(f)=p_1P_1+\cdots+p_nP_n-q_1Q_1-\cdots-q_mQ_m \tag{2.95}$$

(такие дивизоры называются главными).

Дивизоры образуют абелеву группу. Степенью дивизора называется число

$$\deg D=\Sigma n_i. \tag{2.96}$$

Отображение Абеля (N. H. Abel) (2.93) линейно продолжается на группу всех дивизоров.

Положительным $D\geqslant 0$ (эффективным) называется дивизор, для которого все $n_i\geqslant 0$.

Для любого дивизора D ассоциированным с ним линейным пространством $l(D)$ называется пространство мероморфных функций f на Γ таких, что

$$(f)+D\geqslant 0.$$

Размерность этого пространства дается теоремой Римана—Роха [138]. Для дивизора степени, больше либо равной g,

$$\dim l(D)\geqslant \deg D-g+1. \qquad (2.97)$$

Для дивизоров общего положения (2.97) является равенством. Соответствующие дивизоры называются неспециальными.

Рассмотрим *отображение Абеля* неупорядоченных наборов $P_1,\dots,P_g$ точек Γ, т. е. g-ой симметрической степени Γ

$$A:S^g\Gamma\to J(P),\quad A(P_1,\ \dots,\ P_g)=\sum_i A(P_i). \qquad (2.98)$$

Задача обращения этого отображения известна как задача обращения Якоби. Ее решение (Риман) дается на языке тэта-функций. Именно, если для вектора $\zeta=(\zeta_1,\dots,\zeta_g)$ функция $\theta(A(P)-\zeta)$ не равна тождественно нулю на Γ, то она имеет на Γ ровно g нулей $P_1,\dots,P_g$, дающих решение задачи обращения

$$A(P_1)+\dots+A(P_g)=\zeta-\mathcal{K}, \qquad (2.99)$$

где $\mathcal{K}=(\mathcal{K}_1,\dots,\mathcal{K}_g)$ — вектор римановых констант [34], зависящих только от римановой поверхности, выбора на ней базиса циклов и начальной точки отображения Абеля.

Теперь мы готовы перейти к решению обратной задачи восстановления «собственного» вектора $\psi(x,t,\gamma)$ операторов (2.64), (2.65) по его аналитическим свойствам.

Основным алгебро-геометрическим инструментом в теории конечнозонных линейных операторов и в алгебро-геометрическом варианте метода обратной задачи являются функции Клебша—Гордана—Бейкера—Ахиезера. Общее определение таких функций, включая многоточечные, было дано в [57] на основе обобщения аналитических свойств блоховских собственных функций операторов с периодическими и почти периодическими коэффициентами [33], [37], [50]. Многоточечными функциями называются функции, имеющие существенные особенности типа экспоненты в нескольких точках. Такие одноточечные функции («типа экспоненты» $\exp(\lambda x)$, где λ — на алгебраической кривой) были введены в XIX веке Горданом и Клебшем (см. [99]). Их связь с совместной собственной функцией пары скалярных коммутирующих операторов взаимно простых порядков отмечена впервые Бейкером в работе [98]; Н. И. Ахиезером [2] были указаны примеры интерпретации таких функций в спектральной теории операторов на полупрямой. Связь с периодическими задачами до начала 70-х годов известна не была (см. § 6).

Оределение. Пусть $P_1,\dots P_n$ — точки на римановой поверхности Γ рода g; $k_\alpha^{-1}(P)$, локальные параметры в окрестностях этих точек, $k_\alpha^{-1}(P_\alpha)=0$, $\alpha=1, \ldots, n$, $q_1(k), \ldots, q_n(k)$ — набор полиномов, D — дивизор на Γ. *n-точечной функцией Бейкера—Ахиезера*, задаваемой этими данными, называется функция: а) мероморфная на Γ вне точек P_α, причем дивизор ее полюсов и нулей (ψ) удовлетворяет условию $(\psi)+D\geqslant 0$; б) при $P\to P_\alpha$ произведение $\psi(P)\exp(-q_\alpha(k_\alpha(P)))$ аналитично.

Теорема 2.2. Для неспециального дивизора D степени N размерность линейного пространства функций с перечисленными свойствами равна $N-g+1$. В частности, если D набор g точек общего положения, то ψ определена однозначно с точностью до множителя. Она имеет вид:

$$\psi(P)=c\exp\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\int_{Q}^{P}\Omega_{q_\alpha}\right)\frac{\theta\left(A(P)+\sum\limits_{\alpha}U^{(q_\alpha)}-\zeta\right)}{\theta(A(P)-\zeta)}. \tag{2.100}$$

Здесь Ω_{q_α} — нормированный абелев дифференциал второго рода с главной частью в точке P_α вида $dq_\alpha(k_\alpha(P))$ (нормированность означает

$$\oint_{a_i}\Omega_{q_\alpha}=0, \tag{2.101}$$

при этом условии Ω_{q_α} существует и единственен); вектор $2\pi i\, U^{(q_\alpha)}$ — вектор b-периодов дифференциала Ω_{q_α}; $\zeta=A(D)+\mathcal{K}$.

Доказательство формулы (2.100) сводится к проверке того, что она корректно определяет функцию на Γ. Изменение пути интегрирования от Q до P приводит к сдвигу аргументов тэта-функций на вектор решетки периодов, $N+BM$. Показатель экспоненты сдвигается на $2\pi i\left\langle \sum\limits_{\alpha}U^{(q_\alpha)}, M\right\rangle$.

Из (2.92) следует, что значение $\psi(P)$ не зависит от выбора пути интегрирования. Из (2.100) следует, что функция обладает всеми нужными аналитическими свойствами.

В силу теоремы 2.1, каждому конечнозонному решению ранга 1 уравнений (2.37), т. е. решению системы (2.64), (2.65) сопоставляется риманова поверхность Γ, которую в общем положении можно считать неособой, набор полиномов $q_\alpha(x, t, k)$ и неспециальный дивизор степени $g+l-1$, где g — род кривой Γ. Воспользуемся теоремой 2.2 для построения обратного отображения.

Итак, пусть задан перечисленный выше набор данных. Выберем в линейном пространстве функций Бейкера—Ахиезера, отвечающих этим данным, произвольный базис $\psi_i(x, t, P)$ (полиномы $q_\alpha(x, t, k)$ зависят от x и t, как от параметров; от этих же параметров будет, очевидно, зависеть и ψ_i).

По теореме 2.2 в качестве ψ_i можно выбрать функции, заданные формулой (2.35), в которой ζ положено равным

$$\zeta_i = \sum_{s=1}^{g-1} A(P_s) + A(P_{g-1+i}) + \mathcal{K}. \tag{2.102}$$

Теорема 2.3. Пусть $\psi(x, t, P)$ — вектор-функция, координатами которой являются построенные выше $\psi_i(x, t, P)$. Существуют единственные рациональные по λ матричные функции $U(x, t, \lambda)$, $V(x, t, \lambda)$, $W(x, t, \lambda)$ такие, что

$$\partial_x \psi = U\psi, \quad \partial_t \psi = V\psi, \quad W\psi = \mu\psi, \quad P = (\lambda, \mu). \tag{2.103}$$

Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть матрицу $\widetilde{\Psi}(x, t, \lambda)$, столбцами которой являются векторы $\psi(x, t, P_j)$, $P_j(\lambda, \mu_j)$. Эта матрица зависит от нумерации столбцов (т. е. точек P_j), однако матрицы

$$(\partial_x \widetilde{\Psi})\widetilde{\Psi}^{-1}, \quad (\partial_t \widetilde{\Psi})\widetilde{\Psi}^{-1}, \quad \widetilde{\Psi}\hat{\mu}\widetilde{\Psi}^{-1} \tag{2.104}$$

определены уже корректно (т. е. не зависят от этой нумерации) и в силу аналитических свойств ψ являются рациональными функциями λ. Эти матрицы обозначаются через U, V, W соответственно. Здесь $\hat{\mu}$—диагональная матрица, равная $\hat{\mu}_{ij} = \mu_i \delta_{ij}$.

Используя ход доказательства равенства (2.78) в обратную сторону, получим, что $\det \widetilde{\Psi} \neq 0$, если λ не есть точка ветвления. Отсюда следует, что U, V имеют полюса лишь в проекциях отмеченных точек P_α, а W—в проекциях точек на Γ, где μ имеет полюса.

Следствие. Матрицы U, V, W, построенные по формулам (2.104), удовлетворяют уравнениям (2.37), (2.64), (2.65).

Замечание. Формулы (2.104) дают наиболее экономный путь доказательства теоремы вообще, относящейся к произвольным рациональным пучкам. Однако в большинстве случаев, особенно отвечающих редукциям уравнений, явное вычисление матриц U, V, W проводится из требования, чтобы в окрестностях P_α имели место сравнения:

$$\partial_x \psi(x, t, P) \equiv U(x, t, \lambda)\psi(x, t, P) \ (\mathrm{mod}\, O(1) \exp q_\alpha(x, t, k_\alpha))$$

(и аналогичные сравнения для V и W). При этом матричные элементы U, V, W оказываются дифференциальными полиномами от $\xi_{s\alpha}(x, t)$ разложения (2.83) регулярной части ψ в точке P_α. Этот путь будет прослежен подробно далее на примерах построения конечнозонных решений уравнений типа Лакса (см. [34], [56], [57], [58]).

В построении вектора $\psi(x, t, P)$ по набору данных, приведенных перед теоремой 2.3, имеется произвол, связанный с возможностью выбора различных базисов ψ_i в линейном пространстве функций Бейкера—Ахиезера, отвечающих дивизору полюсов D.

Этому произволу, при котором $\psi(x, t, P)$, переходит в $g(x, t)\psi(x, t\ P)$, где g — невырожденная матрица, соответствует калибровочная симметрия (2.38) уравнений (2.37), (2.64), (2.65), (матрица W переходит при таком преобразовании в

$$W \to gWg^{-1}). \qquad (2.105)$$

Рассмотрим две вектор-функции $\psi(x, t, P)$, $\tilde{\psi}(x, t, P)$, отвечающие двум эквивалентным дивизорам D и $\tilde{D}$. Эквивалентность этих дивизоров означает, что существует мероморфная функция $f(P)$ такая, что ее полюса совпадают с D, а нули с $\tilde{D}$. Из определения следует, что компоненты $f\psi$ обладают теми же аналитическими свойствами, что и компоненты вектор-функции $\psi(x, t, P)$. Значит,

$$\psi(x, t, P) = g(x, t) f(P) \tilde{\psi}(x, t, P), \qquad (2.106)$$

и функции ψ и $\tilde{\psi}$ определяют калибровочно-эквивалентные решения.

Будем рассматривать как уравнения (2.37), (2.64), (2.65), так и их решения с точностью до калибровочных преобразований (2.38), (2.105). Из (2.105) и определения Г (2.70) следует, что калибровочные преобразования оставляют инвариантными кривые Г.

Теорема 2.4. *Множество конечнозонных решений (рассматриваемых с точностью до калибровочной эквивалентности), отвечающих неособой кривой Г, изоморфно тору — J(Г)-многообразию Якоби этой кривой.*

Утверждение теоремы следует из того, что в силу известной теоремы Абеля два дивизора эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\deg D = \deg \tilde{D}, \quad A(D) \equiv A(\tilde{D}).$$

Знак сравнения подразумевает сравнение по модулю периодов якобиана кривой Г.

Коэффициенты полинома $Q(\lambda, \mu)$ являются интегралами уравнений (2.37), (2.64). Сформулированная теорема означает, что множество уровней этих интегралов является в общем положении тором.

Для специальных значений интегралов, при которых поверхность Г имеет особенности, многообразие уровней этих интегралов изоморфно обобщенному якобиану кривой, который представляет собой произведение тора на линейное пространство.

Многосолитонным и рациональным решениям уравнений (2.37) отвечают рациональные кривые с особенностями. Разным типам особенностей отвечают и разные типы решений. Например, в случае особенностей типа самопересечений получаются многосолитонные решения (см., например, для уравнения КдФ § 10, [45]), а в случае особенностей типа «клюва», получаются рациональные решения.

Рассмотрим подробнее ряд примеров, связанных с *гиперэллиптическими кривыми.* Как уже говорилось, конечнозонные решения уравнения КдФ являются ограничением этого уравнения на стационарные точки одного из высших аналогов уравнения КдФ. Они удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению, эквивалентному операторному уравнению

$$[L,\ A_n]=0, \tag{2.107}$$

где A_n — дифференциальный оператор порядка $2n+1$. Это уравнение допускает, как было показано выше, λ-представление (2.32), где U_L имеет вид (2.33), а

$$W_A=\begin{pmatrix} 0 & \lambda^n \\ \lambda^{n+1} & 0 \end{pmatrix}+O(\lambda^{n-1}). \tag{2.108}$$

Отсюда характеристическое уравнение (2.70),

$$\det(\mu\cdot 1-W_A(x,\ t,\ \lambda))=\mu^2-R_{2n+1}(\lambda)=0, \tag{2.109}$$

задает гиперэллиптическую кривую Γ. Коэффициенты полинома

$$R_{2n+1}=\lambda^{2n+1}+\sum_{i=1}^{2n+1} r_i\lambda^{2n+1-i}$$

являются полиномами от $u,\ u',\ \ldots,\ u^{(2n+1)}$ и, по-доказанному, — интегралами уравнения (2.107).

Кривую Γ можно представлять склеенной из двух экземпляров λ-плоскости вдоль разрезов, соединяющих E_i — нули полинома R_{2n+1} и бесконечно удаленную точку $E=\infty$

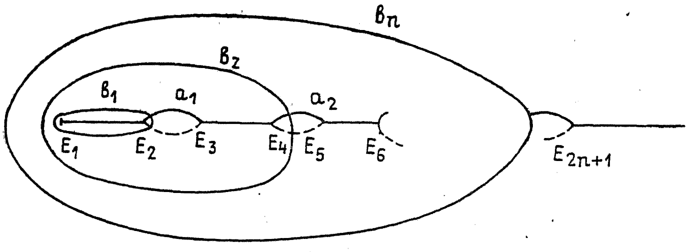

Рис. 1

Для вещественных $u(x)$ E_i являются простыми точками спектра периодической и антипериодической задач для *оператора Штурма—Лиувилля* (J. C. F. Sturm—J. Liouville)

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+u(x), \tag{2.110}$$

отрезки $[E_{2i-1},\ E_{2i}]$ — разрешенные зоны спектра L на всей оси, $[E_{2i},\ E_{2i+1}]$, $i=1,\ldots,\ n$, — запрещенные зоны. (Подробнее о спектральной теории конечнозонных операторов см. § 6.)

В качестве a-циклов удобно выбрать циклы, расположенные над запрещенными зонами, а в качестве b-циклов — циклы, охватывающие отрезок $[E_1, E_{2n}]$ вещественной оси.

Пусть $\psi(x, t, P)$ — функция Бейкера—Ахиезера, имеющая n полюсов (n — род Γ) $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ и вид в окрестности $P_0=\infty$

$$\psi(x, t, P)=\exp(kx+k^3t)\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s(x, t)\,k^{-s}\right), \qquad (2.111)$$

$k=\sqrt{\lambda}$.

По теореме 2.2 она существует и единственна. Пусть $u(x, t)=2\xi_1'$, тогда прямая подстановка (2.111) дает

$$(-\partial_x^2+u(x, t)+\lambda)\,\psi(x, t, P)=e^{kx+k^3t}O(k^{-1}). \qquad (2.112)$$

Функция $\tilde{\psi}(x, t, P)$, равная левой части (2.112), удовлетворяет всем требованиям, определяющим ψ, кроме одного. Ее разложение (2.111) в окрестности P_0 начинается с $\tilde{\xi}_1 k^{-1}+\ldots$. Из единственности ψ следует, что $\tilde{\psi}=0$.

Аналогично, существуют единственные функции $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$ такие, что

$$A\psi-\partial_t\psi=O(k^{-1})\,e^{kx+k^3t}, \qquad (2.113)$$

где

$$A=\partial_x^3+v_1\partial_x+v_2. \qquad (2.114)$$

Из (2.113) имеем

$$v_1=-3\xi_1'=-\frac{3}{2}u.$$

Совместность (2.113) и (2.112) эквивалентна уравнению КдФ.

Нормированные *абелевы дифференциалы второго рода*, имеющие полюса в P_0 второго и четвертого порядков, представимы в виде:

$$\Omega^{(2)}=\frac{\lambda^n+\sum_{i=1}^{n} r_i\lambda^{n-i}}{\sqrt{R_{2n+1}(\lambda)}}\,d\lambda, \qquad (2.115)$$

$$\Omega^{(4)}=\frac{\lambda^{n+1}-s_1\lambda^n+\sum_{i=1}^{n}\tilde{r}_i\lambda^{n-i}}{\sqrt{R_{2n+1}(\lambda)}}\,d\lambda, \qquad (2.116)$$

где $R_{2n+1}(\lambda)=\prod_{i=1}^{2n+1}(\lambda-E_i)$, $s_1=\sum_{i=1}^{2n+1}E_i$.

Коэффициенты r_i, $\tilde{r}_i$ определяются условиями нормировки

$$\int_{E_{2i}}^{E_{2i+1}} \Omega^{(2)} = \int_{E_{2i}}^{E_{2i+1}} \Omega^{(4)} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.117}$$

По теореме 2.2

$$\psi(x, t, P) = c \exp\left(x \int_{E_1}^{P} \Omega^{(2)} + t \int_{E_1}^{P} \Omega^{(4)}\right) \frac{\theta(A(P) + Ux + Vt - \zeta)}{\theta(A(P) - \zeta)},$$

$$c = c(x, t), \tag{2.118}$$

где

$$\pi i U_k = \int_{E_1}^{E_{2k}} \Omega^{(2)}, \tag{2.119}$$

$$\pi i V_k = \int_{E_1}^{E_{2k}} \Omega^{(4)}. \tag{2.120}$$

Если в качестве начальной точки отображения Абеля выбрать E_1, то после явного вычисления вектора римановых констант получим

$$\zeta_k = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_{2i}}^{\gamma_i} \omega_k. \tag{2.121}$$

В окрестности P_0 имеем

$$A(P) = -Uk^{-1} + O(k^{-2}) \tag{2.122}$$

и, разлагая (2.118), придем окончательно к формуле Матвеева—Итса [50] для конечнозонных решений уравнения

$$u(x, t) = -2\partial_x^2 \ln\theta(Ux + Vt - \zeta) + \text{const}. \tag{2.123}$$

Замечание 1. Построение конечнозонных решений уравнения КдФ выше было проведено с помощью исходного коммутационного представления без явного перехода к λ-представлению (2.32) в матрицах (2×2). Для сопоставления с теоремами 2.1, 2.2 укажем лишь, что компонентами вектора $\psi(x, t, \lambda)$, фигурирующего в их формулировке, являются $\psi(x, t, \lambda)$ и $\psi_x(x, t, \lambda)$. Дивизор полюсов ψ совпадает с дивизором полюсов $\psi(x, t, \lambda)$ и с точкой P_0.

Укажем еще, что теорема 2.3 сопоставляет алгебро-геометрическим спектральным данным: $\Gamma, \gamma_1, \ldots, \gamma_g$, кроме операторов L и A, матрицу W, являющуюся $W_{A_n} = \lambda$-представлением оператора A_n из (2.42). Сам оператор A_n по этим данным восстанавливается аналогично построению оператора L.

Его коэффициенты однозначно определяются из сравнения

$$A_n\psi \equiv \mu\psi \,(\mathrm{mod}\, e^{kx + k^3 t} O(k^{-1})), \quad \mu = k^{2n+1} + a_1 k^{2n-1} + \ldots.$$

Из сравнения следует точное равенство

$$A_n\psi(x, t, P)=\mu(P)\psi(x, t, P); \ (\mu, \lambda)=P.$$

Замечание 2. В ряде приложений полезными оказываются уравнения движения $\gamma_i(x, t)$ нулей *блоховской функции* $\psi(x, t, P)$, которые впервые были получены в [33].

Для этого рассмотрим функции $\psi_x\psi^{-1}$ и $\psi_t\psi^{-1}$. Функция $\psi_x\psi^{-1}$ имеет полюса в точках $\gamma_i(x, t)$ и вид $k+O(k^{-1})$ в окрестности P_0. Значит, она однозначно представима в виде

$$\frac{\psi_x}{\psi}=\frac{\sqrt{R(\lambda)}+P(x, t, \lambda)}{\prod\limits_{i=n}^{n}(\lambda-\gamma_i(x, t))},$$

где $P(x, t, \lambda)$ — полином степени $(n-1)$. Он однозначно определяется из того, что $\psi_x\psi^{-1}$ имеет полюс над $\lambda=\gamma_i$ лишь при одном знаке $\sqrt{R}$ (например, при знаке плюс). Значит,

$$P(x, t, \gamma_i(x, t))=\sqrt{R(\gamma_i(x, t))}.$$

В окрестности полюса $\psi_x\psi^{-1}$ имеем

$$\frac{\psi_x}{\psi}=\frac{\gamma_i'(x, t)}{\lambda-\gamma_i(x, t)}+O(1), \quad \gamma_i'=\frac{\partial}{\partial x}\gamma_i.$$

Сравнивая предшествующие равенства, найдем окончательно

$$\gamma_i'(x, t)=\frac{2\sqrt{R(\gamma_i(x, t))}}{\prod\limits_{j\neq i}(\gamma_i(x, t)-\gamma_j(x, t))}.$$

Аналогично

$$\frac{\psi_t}{\psi}=\frac{\lambda\sqrt{R(\lambda)}+P_1(x, t, \lambda)}{\prod\limits_{i}(\lambda-{}_i\gamma(x, t))}$$

и, повторяя вывод уравнений для γ_i', получим

$$\dot\gamma_i=\frac{2\gamma_i\sqrt{R(\gamma_i)}}{\prod\limits_{j\neq i}(\gamma_i-\gamma_j)}, \quad \dot\gamma_i=\frac{\partial}{\partial t}\gamma_i.$$

Изоморфизм Абеля (2.38) линеаризует эти уравнения на якобиане $J(\Gamma)$.

В качестве второго примера рассмотрим построение конечнозонных решений уравнения sine-Gordon (2.44), которые впервые были получены в [52].

Из (2.64), (2.65) следует, что $W(\xi, \eta, 0)$ коммутирует с сингулярной частью U в $\lambda=0$; $W(\xi, \eta, \infty)$ коммутирует с сингулярной частью V в точке $\lambda=\infty$. Отсюда гиперэллиптическая кривая Γ, отвечающая конечнозонному решению уравнения sine-Gordon, имеет в точках $\lambda=0$, $\lambda=\infty$ ветвления.

Не прослеживая буквально ход доказательства теоремы 2.1, приведем вид вектор-функций Бейкера—Ахиезера для этого уравнения. Компоненты $\psi_i(\xi, \eta, P)$ имеют n полюсов γ_i вне точек ветвления P_+ и P_-, расположенных над $\lambda=0$, $\lambda=\infty$. В окрестности этих точек

$$\psi_1^{\pm}=e^{k(x\pm t)}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\chi_{s1}^{\pm}(\xi, \eta)k_{\pm}^{-s}\right), \tag{2.124}$$

$$\psi_2^{\pm}=e^{k(x\pm t)}k^{\pm 1}\left(\sum_{s=0}^{\infty}\chi_{s2}^{\pm}(\xi, \eta)k_{\pm}^{-s}\right), \tag{2.125}$$

$$\xi=x+t, \quad \eta=x-t, \quad k_{\pm}=\lambda^{\mp 1/2}.$$

Функции ψ_i однозначно определяются нормировкой $\chi_{0i}^{+}\equiv 1$. (Дивизор D степени $n+l-1=n+1$ равен $\gamma_1+\ldots+\gamma_n+P_+$.)

Из определения ψ_1 и ψ_2 следует, что $\partial_\eta\psi_1$ и $\lambda\psi_2$ обладают одинаковыми аналитическими свойствами. Значит, они пропорциональны. Для вычисления константы пропорциональности нужно сравнить коэффициенты при члене $\lambda^{1/2}$ в разложении этих функций в P_+. Имеем

$$\partial_\eta\psi_1=e^{-iu}\lambda\psi_2, \quad e^{-iu}=\frac{\chi_{01}^{-}}{\chi_{02}^{-}}. \tag{2.126}$$

Аналогично

$$\partial_\eta\psi_2=e^{iu}\psi_1. \tag{2.127}$$

Таким же образом доказывается, что

$$\partial_\xi\psi_1=\frac{iu_\xi}{2}\psi_1+\psi_2, \tag{2.128}$$

$$\partial_\xi\psi_2=\lambda^{-1}\psi_1-\frac{iu_\xi}{2}\psi_2. \tag{2.129}$$

Следствие. Функция $u(\xi, t)$, определенная из (2.126), G является решением уравнения sine-Gordon.

Найдем ее явный вид. Аналогично теореме 2.2 показывается, что

$$\psi_n(\xi, \eta, P)=r_n(\xi, \eta)\cdot\exp\left(\xi\int_Q^P\Omega_{+}^{(2)}+\eta\int_Q^P\Omega_{-}^{(2)}+n\int_Q^P\Omega_{+-}\right)\times$$
$$\times\frac{\theta(A(P)-\zeta+U^{+}\xi+U^{-}\eta+V_n)}{\theta(A(P)-\zeta)}. \tag{2.130}$$

Здесь $\Omega_{\pm}^{(2)}$—нормированные абелевы дифференциалы с полюсами второго порядка в точках $P_{\pm}$, Ω_{+-}—дифференциал третьего рода с вычетами ± 1 в $P_{\pm}$, $2\pi iU^{\pm}$, $2\pi iV$—векторы b-периодов этих дифференциалов.

Множитель $r_n(\xi, \eta)$ выбирается из условия равенства предэкспоненциального множителя единице в точке P_+. Тогда χ_{0n}^- равно значению этого множителя в P_-.

Окончательно придем после простых вычислений к следующему выражению для конечнозонных решений

$$e^{iu} = \text{const}\ \frac{\theta^2(U^+\xi + U^-\eta - \zeta)}{\theta(U^+\xi + U^-\eta - \zeta + V)\,\theta(U^+\xi + U^-\eta - \zeta - V)}. \quad (2.131)$$

Отметим, что вектор V равен полупериоду, так как в силу соотношений Римана и теоремы Абеля

$$2V = 2(A(P_+) - A(P_-)) \equiv 0$$

(последнее сравнение имеет место, поскольку дивизоры $2P_+$ и $2P_-$ — эквиваленты, являясь нулями и полюсами λ на Γ).

До сих пор речь шла о построении комплексных решений нелинейных уравнений, допускающих коммутационное представление одного из перечисленных видов. Выделение среди них вещественных неособых решений оказывается сравнительно простым в тех случаях, когда вспомогательная линейная задача

$$L\psi = \lambda\psi \quad (2.132)$$

для представления Лакса, или

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + U(x, t, \lambda)\right)\psi = 0, \quad (2.133)$$

в случае общего представления (2.37), является самосопряженной. Однако почти для всех нелинейных уравнений (нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение sine-Gordon, уравнения нелинейного взаимодействия волновых пакетов и т. д.) соответствующие линейные задачи не являются самосопряженными.

Типичные условия, выделяющие физически интересные вещественные решения, имеют один из следующих типов

$$U(x, t, \lambda) = JU^+(x, t, \sigma(\lambda))J^{-1}, \quad (2.134)$$

$$U(x, t, \lambda) = J\bar{U}(x, t, \sigma(\lambda))J^{-1}, \quad (2.135)$$

где крест означает эрмитово сопряжение, $\sigma(\lambda)$ — антиголоморфная инволюция λ-плоскости (например $\lambda \to \bar{\lambda}$, $\lambda \to \bar{\lambda}^{-1}$) и J — диагональная матрица с элементами $\varepsilon_k = \pm 1$.

Так как этим же условиям вещественности можно подчинить и матрицу $W(x, t, \lambda)$, то возникающие при построении вещественных конечнозонных решений кривые Γ, заданные уравнением (2.70), являются вещественными, т. е. на них определена антиголоморфная инволюция

$$\tau : \Gamma \to \Gamma,$$

оставляющая выделенные точки P_α неподвижными, либо переставляющая их определенным образом.

Описание типов вещественных кривых и, что самое трудное и интересное, расположение на них полюсов γ_i функций Бейкера—Ахиезера, приводящих к вещественным решениям, ставит задачи вещественной алгебраической геометрии, которые до сравнительно недавнего времени были совершенно не разработанными. (Первые серьезные продвижения в решении этих задач применительно к нелинейному уравнению Шрёдингера, уравнению sine—gordon были сделаны в [91], хотя полученные в этих работах результаты и далеки от эффективности.)

Подробное изложение недавних достижений в вещественном конечнозонном интегрировании приводится в [5], [35], [38], [108]. Здесь же на двух разобранных выше примерах опишем два основных типа инволюций на множестве дивизоров, различные сочетания которых дают все известные пока условия вещественности.

Пусть Γ — *вещественная гиперэллиптическая кривая*, т. е. кривая, заданная уравнением (2.109) с вещественным полиномом R_{2n+1}. Если набор точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ инвариантен относительно антиголоморфной инволюции

$$\tau:(\lambda, \mu) \to (\overline{\lambda}, \overline{\mu})$$

и $\psi(x, t, P)$ — отвечающая им функция Бейкера — Ахиезера, то

$$\overline{\psi}(x, t, \tau(P)) = \psi(x, t, P), \tag{2.136}$$

так как и правая, и левая части обладают одинаковыми аналитическими свойствами и равны между собой в силу единственности ψ. Отсюда сразу следует, что соответствующее конечнозонное решение $u(x, t)$ уравнения КдФ вещественно.

Предположим теперь, что τ имеет на Γ $n+1$ неподвижный овал $a_1, \ldots, a_{g+1}$, на одном из которых лежит точка $P_0 = \infty$. (В вещественной алгебраической геометрии кривые рода g с $g+1$ вещественным овалом называются M-кривыми.) В рассматриваемом случае это означает, что все точки ветвления E_i являются вещественными.

Если точки γ_i расположены по одной на каждом овале, $\gamma_i \in a_i$ то $u(x, t)$ не имеет особенностей. Действительно, как видно из построения ψ, полюс у $u(x, t)$ возникает лишь тогда, когда один из n нулей ψ попадает в P_0 (при этом $\theta(Ux+Vt-\zeta) = 0$). Но ψ на вещественных овалах в силу (2.136) вещественна. Так как ψ имеет на каждом a_i полюс, то она имеет, по крайней мере, и один нуль. Так как всего нулей n, то они отделены от P_0.

Для вещественности конечнозонных решений уравнения sine-Gordon необходима вещественность гиперэллиптической кривой Γ [52]. Рассмотрим на ней антиинволюцию

$$\tau:(\lambda, \mu) \to (\overline{\lambda}, -\overline{\mu}).$$

Действие этой антиинволюции на локальных параметрах $k_{\pm}^{-}$ таково, что

$$\tau^*(k_{\pm}) = -\overline{k}_{\pm}.$$

Пусть дивизор полюсов $\psi_n(\xi, \eta, P)$ удовлетворяет условию

$$D + \tau(D) \equiv K + P_+ + P_-, \tag{2.137}$$

где K — канонический класс, т. е. дивизор нулей голоморфного дифференциала на Γ.

Условие (2.137) означает, что D, $\tau(D)$ являются нулями дифференциала третьего рода

$$\omega = \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{\lambda^{n+1} + \alpha_1\lambda^n + \ldots + \alpha_{n+1}}{\sqrt{R_{2n+1}(\lambda)}} \tag{2.138}$$

с полюсами в точках $P_{\pm}$.

Рассмотрим дифференциал

$$\psi_1(\xi, \eta, P)\overline{\psi_1}(\xi, \eta, \tau(P))\,\omega. \tag{2.139}$$

Из (2.124) и (2.137) следует, что это мероморфный дифференциал с единственными полюсами в точках $P_{\pm}$. Вычет этого дифференциала в P_+ равен 1. Так как сумма вычетов любого мероморфного дифференциала равна нулю, то

$$\chi_{01}^{-}\cdot\overline{\chi_{01}^{-}} = 1. \tag{2.140}$$

Аналогично, рассматривая дифференциал

$$\lambda\psi_2(\xi, \eta, P)\overline{\psi_2}(\xi, \eta, \tau(P))\,\omega,$$

получим

$$\chi_{02}^{-}\overline{\chi_{02}^{-}} = 1.$$

Значит, согласно (2.126),

$$|e^{-iu}| = |\chi_{01}^{-}|/|\chi_{02}^{-}| = 1$$

и $u(\xi, \eta)$ вещественно.

§ 3. Гамильтонова теория гиперэллиптических λ-пучков

В этом параграфе, следуя [21], [22], изложим гамильтонову теорию систем, связанных с *гиперэллиптическими кривыми* (см. примеры предшествующего и следующего параграфов). Эти системы обычно происходят из систем вида (2.64), (2.65), где размерность матриц (2×2).

Уравнения (2.64) представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения.

Исходными «физическими» координатами в конечномерном пространстве их решений являются значения матричных элементов U и W в какой-либо начальной точке $x=x_0$ (вернее значения матричных элементов сингулярных частей U и W в их полюсах).

Например, для «высших уравнений КдФ» пространство решений уравнений коммутативности оператора Штурма—Лиувилля L и оператора A_n порядка $2n+1$ имеет размерность $3n+1$. Координатами в нем являются

$$u(x_0), \ldots, u^{(2n+1)}(x_0), \ h_2, \ldots, h_n,$$

где константы h_j возникают при выражении коэффициентов оператора A_n через u и ее производные.

В предшествующем параграфе был установлен изоморфизм этого пространства с пространством

$$(\Gamma, P_1, \ldots, P_k) = N^{n+k},$$

где Γ — гиперэллиптическая кривая, заданная в виде

$$w^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (\lambda - \lambda_i)$$

(как для уравнения КдФ; sine-Gordon, где $\lambda_1=0$). либо в виде

$$w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (\lambda - \lambda_i).$$

(нелинейный Шрёдингер, цепочка Тода и т. д.). Координатами в окрестности P_j являются $\lambda(P)$ — проекции точек на λ-плоскость. В дальнейшем (в тех случаях, когда это не вызовет недоразумений) точки P_j будут обозначаться как $\gamma_j=\lambda(P_j)$ без указания $\varepsilon_j=\pm$ — номера листа поверхности Γ.

Пространство N^{n+k} расслаивается над M^n — многообразием гиперэллиптических кривых. Координатами в M^n являются λ_i. Слоем этого расслоения

$$N^{n+k} \to M^n$$

является $S^k\Gamma$ — k-ая симметрическая степень кривой Γ.

В основных примерах $k=g$ (КдФ, sine-Gordon) или $k=g+1$ (НШ). В первом случае слой, в силу теоремы Абеля, бирационально изоморфен комплексному тору — якобиану кривой $J(\Gamma)$.

Определим на фазовом пространстве N^{n+k} наших систем *аналитические скобки Пуассона.*

а) Пусть A — некоторый набор функций на N^{n+k}, зависящих только от точки базы M^n, т. е. от гиперэллиптической кривой. (В дальнейшем A будет играть роль аннулятора скобки Пуассона, которая становится невырожденной на многообразиях N_A, заданных уравнениями $f=\mathrm{const}$ для всех $f\in A$; $N_A \to M_A$, $M_A \in M^n$.)

б) Задана мероморфная 1-форма $Q(\Gamma)$ на римановой поверхности Γ или на ее накрывающей $\hat{\Gamma}\to\Gamma$. В локальной записи

$$Q(\Gamma) = Q(\Gamma, \lambda)\, d\lambda. \tag{2.141}$$

Требуется, чтобы производные $Q(\Gamma)$ вдоль всех направлений базы, касательных к многообразиям M_A, были глобально определенными мероморфными дифференциальными формами на самой римановой поверхности Γ (а не на накрывающей).

в) Во всех важнейших примерах оказывалось, что форма Q либо мероморфна на Γ с самого начала, либо мероморфна на регулярной накрывающей $\hat{\Gamma}$ с абелевой группой монодромии, причем образ $\pi_1(\hat{\Gamma}) \to \pi_1(\Gamma)$ порождается набором циклов с нулевыми попарными индексами пересечений.

Определение. Если замкнутая 2-форма

$$\Omega_Q = \sum dQ(\Gamma, \gamma_j) \wedge d\gamma_j \tag{2.142}$$

невырожденна в «общей» точке области N_A, где пара (A, Q) обладает свойствами а), б), в), то будет говориться, что задана аналитическая скобка Пуассона с аннулятором на открытой области N^{n+k}. Размерность N_A в этом случае должна быть равна $2k$.

По определению, скобка Пуассона (2.142) задается свойствами:

$$\begin{gathered} \{\gamma_i, \gamma_j\} = 0, \quad \{Q(\gamma_i), Q(\gamma_j)\} = 0, \\ \{Q(\gamma_i), \gamma_j\} = \delta_{ij}, \\ \{f, \gamma_j\} = \{f, Q(\gamma_k)\} = 0, \quad f \in A. \end{gathered} \tag{2.143}$$

Если λ_i — какие-либо координаты на многообразии M_A, то из (2.142) следует, что Ω_Q содержит в своем разложении только члены вида $d\lambda_i \wedge d\gamma_j$. Отсюда сразу вытекает предложение:

Любые две функции g, h, зависящие лишь от $\Gamma \in M^n$, находятся в инволюции

$$\{g(\Gamma), h(\Gamma)\} = 0. \tag{2.144}$$

Пусть $\tau_1, \ldots, \tau_k$ — касательные направления к M_A в «точке общего положения». По определению аналитической скобки Пуассона, $\nabla_{\tau_i} Q$ есть мероморфный дифференциал. Как и любой другой дифференциал, его однозначно (если базис a-циклов фиксирован (2.86)) можно разложить в сумму голоморфного дифференциала ω_i, нормированных (см. (2.101)) дифференциалов $\tilde{\omega}_i$ и $\tilde{\tilde{\omega}}_{it}$ 2-го и 3-го родов соответственно:

$$\nabla_{\tau_i} Q = \omega_i + \tilde{\omega}_i + \sum \tilde{\tilde{\omega}}_{it}, \tag{2.145}$$

где $\tilde{\tilde{\omega}}_{it}$ имеет пару полюсов первого порядка в точках (P_t', P_t'').

Не ограничивая общности, при $k \geqslant g$ можно считать, что локально координаты τ_i выбраны так, что ω_i образуют при $i \leqslant g$ нормированный

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}$$

базис голоморфных дифференциалов, а при $j>g$ $\omega_j=0$.

Рассмотрим потоки на N^{n+k}, порожденные гамильтонианами вида $H(\Gamma)$, которые, согласно (2.144), коммутируют между собой.

Теорема 2.5. Пусть координаты τ_i таковы, как указано выше, тогда комплексные переменные

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{k} \int_{P_0}^{\gamma_j} \nabla_{\tau_j} Q \tag{2.146}$$

в точке

$$(\Gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$$

общего положения не зависимы и имеют линейную по времени динамику.

Доказательство может быть получено полностью аналогично стандартной процедуре Лиувилля.

Определение ψ_j (2.146) зависит от выбора путей между P_0 и γ_i. Поэтому эти величины определены с точностью до решетки в C^k, порожденной $2g+l$ периодами e_q, e_q', η_s градиента ∇Q:

$$e_q{}^i = \oint_{a_q} \nabla_{\tau_i} Q = \delta_q{}^i, \quad e_q^{\prime i} = \oint_{b_q} \nabla_{\tau_i} Q, \quad \eta_s{}^i = \mathrm{res}_{P_s'} \nabla_{\tau_i} Q. \tag{2.147}$$

Преобразование (2.146) позволяет по аналитической скобке Пуассона (A, Q), удовлетворяющей перечисленным выше требованиям, построить расслоение

$$N_{(Q,A)} \xrightarrow{J_Q(\Gamma)} M_A,$$

слоем которого является фактор C^k по решетке, порожденной векторами (2.147).

Пусть $\varkappa$ число функционально независимых (по модулю A) вычетов формы Q, $\varkappa \leqslant l$.

Вообще говоря,

$$2g+\varkappa \leqslant 2k. \tag{2.148}$$

Переменные ψ_j образуют компактный тор T^{2k} лишь в том случае, когда $2g+\varkappa=2k$. Отнюдь не всегда будет получаться абелев тор. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $k=g$ и все формы $\nabla_{\tau_i} Q$ были голоморфны.

Сопоставляя (2.146) с определением отображения Абеля (2.93), получим следующую теорему.

Теорема 2.6. Преобразование Абеля $S^g\Gamma \to J(\Gamma)$ линеаризует динамику всех гамильтонианов вида $H(\Gamma)$ для скобок Пуассона, заданных парами (A, Q) общего положения, если и только если производные $\nabla_{\tau_i} Q$ по всем направлениям, касательным к M_A, дают базис голоморфных дифференциалов на Γ.

Специальный выбор векторов τ_i, отвечающих дифференцированию Q по так называемым «переменным действия», канонически сопряженным к «углам» на торах, меняющимся от 0 до 2π, имеет смысл обсуждать лишь для вещественной теории.

Рассмотрим *вещественные гиперэллиптические кривые* Γ. Это кривые с антиголоморфной инволюцией $\sigma_\Gamma:\Gamma\to\Gamma$, которая порождается антиголоморфной инволюцией σ на пространстве M^n всех гиперэллиптических кривых.

Форма Q и аннулятор A также должны быть естественным образом согласованы с σ, σ_Γ:

$$\begin{aligned} &\text{а) } \sigma_\Gamma^* Q = \bar{Q}, \\ &\text{б) } \sigma^* A = \bar{A}. \end{aligned} \tag{2.149}$$

Простейший пример вещественных структур, который можно назвать «элементарными» для интересующих нас гамильтоновых систем, уже фактически возникал ранее при описании вещественных неособых конечнозонных решений уравнения КдФ.

Пусть σ_Γ имеет на Γ $g+1$ либо g неподвижных овалов. (Такие кривые называются M или M—1-кривыми). В первом случае $k=g$ либо $k=g+1$. Во втором случае $k=g$.

Лемма. Если скобка Пуассона (A, Q) обладает свойствами (2.149), то наборы точек γ_i ($i=1,\ldots,g+1$ или $i=i_1,\ldots i_g$), лежащих на попарно различных неподвижных овалах a_i антиинволюции σ_Γ, инвариантны относительно динамики, порожденной вещественными гамильтонианами $H(\Gamma)$, $H(\sigma(\Gamma))=\bar{H}(\Gamma)$.

Для M-кривых и $k=g$ допустимые наборы $\gamma_i\in a_i$ образуют $g+1$ компоненту связности, изоморфную вещественному тору T^g. Для M-кривых и $k=g+1$ или $(M-1)$-кривых и $k=g$ имеется всего одна компонента связности — вещественный тор T^{g+1} или T^g.

Пример неэлементарной вещественной структуры возникал при описании вещественных решений уравнения sine-Gordon (§ 2).

Эффективное задание такой структуры возможно лишь в терминах координат на N, связанных с γ преобразованием (2.146).

Неэлементарной вещественной структурой будет называться антиинволюция

$$\tau: N_{(Q,A)} \to N_{(Q,A)},$$

совместимая с расслоением

$$N_{(Q,A)} \xrightarrow{J_Q(\Gamma)} M_A.$$

На слоях $J_Q(\Gamma)$ должно быть суперпозицией сдвига и автоморфизма $J_Q(\Gamma)$ как вещественной коммутативной группы.

Вещественные подмногообразия в *фазовом пространстве* выделяются условиями

$$\tau(\eta)=\bar{\eta} \tag{2.150}$$

или

$$\tau(\eta)=-\bar{\eta}+\eta_0^{\alpha}. \tag{2.151}$$

Случай (2.151) реализуется для sine-gordon и НШ (2.14). Вектор η_0^{α} может для данной кривой принимать конечное число значений. Вычисление их для уравнения sine-Gordon впервые было проделано в [38].

Теорема 2.7. Для аналитических скобок Пуассона, удовлетворяющих элементарным и неэлементарным условиям вещественности, переменные действия J_j, канонически сопряженные координатам на торах T^k, меняющимся от 0 до 2π, задаются формулой

$$J_j=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{a_j} Q(\Gamma,\lambda)\,d\lambda. \tag{2.152}$$

Доказательство теоремы следует, по существу, из хода доказательства теоремы Лиувилля и того, что (2.152) представляет собой величину

$$J_j=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\tilde{a}_j} p\,dq, \tag{2.153}$$

где $\tilde{a}_j$ — базисные 1-циклы на торах T^k.

Для изучаемого класса скобок Пуассона переменные действия J_j (2.153) приобретают важную интерпретацию как интегралы по элементам a_j группы $H_1(\Gamma\diagdown P, Z)$, где P — набор полюсов формы Q. Это приводит к значительно большей эффективности при построении переменных действия, чем в теореме Лиувилля. В частности, например, до [21] явного построения переменных действия для случая Ковалевской (см. ниже) не было известно, так как единственный способ их построения, известный классикам, — это метод разделения переменных в уравнении Гамильтона—Якоби.

Теорема 2.6 дает необходимые и достаточные условия на скобку (Q, A), которые гарантируют линеаризацию преобразованием Абеля гамильтоновых потоков, порожденных гамильтонианами $H(\Gamma)$.

Как известно, преобразование Абеля линеаризует все высшие КдФ. Выразим в терминах формы Q соответствующие этим потокам гамильтонианы.

Теорема 2.8. Коэффициенты разложения

$$Q(\Gamma,\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k q_k(\Gamma),\quad z=\lambda^{-1/2}, \tag{2.154}$$

таковы, что $h_l(\Gamma)=q_{2l+3}(\Gamma)$ являются гамильтонианами высших КдФ с номером $l\geqslant 0$. Остальные коэффициенты q_k принадлежат аннулятору A.

В заключение перечислим ряд важнейших примеров.

Пример 1. Скобка Гарднера—Захарова—Фаддеева. Из [112] извлекается

$$Q=2ip(\lambda)\,d\lambda,\quad A=\left\{T_1,\ \ldots,\ T_g,\ \bar{u}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u\,dx\right\},\tag{2.155}$$

$p(\lambda)$ — квазиимпульс, где $dp(\lambda)$ — дифференциал 2-го рода с единственным полюсом при $\lambda=0$,

$$\oint_{a_j} dp(\lambda)=0,\quad j=1,\ \ldots,\ g.\tag{2.156}$$

Периоды T_j квазипериодического потенциала $u(x)$ определяются как

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{b_j} dp=T_j.\tag{2.157}$$

Пример 2. *Скобка Магри* (F. Magri) [128]. В этой скобке высшие уравнения КдФ имеют вид:

$$\dot{u}=\left(al+b\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\delta H}{\delta u},\quad l=\frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial x^3}+u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u.\tag{2.158}$$

Здесь имеем

$$Q=2ip(\lambda)(a\lambda+b)^{-1}\,d\lambda.\tag{2.159}$$

При $b=0$ аннулятор есть

$$A=\{T_1,\ \ldots,\ T_g,\ J\},$$

где

$$J=\sum_{k=0}^{g+1} c_k I_{g-k-1}\tag{2.160}$$

— линейная комбинация интегралов Крускала, экстремалями которой являются конечнозонные решения, построенные по Г.

Пример 3. Гамильтонов формализм стационарной задачи для высших КдФ.

Уравнения коммутативности (2.61) могут быть представлены в виде

$$\delta J=0,\tag{2.161}$$

где J — то же, что и в (2.160). Это представление естественно порождает гамильтонов формализм системы (2.61) (см. [11], [12]). Из [97] извлекается

$$Q=\sqrt{-R(\lambda)}\,d\lambda,\quad R(\lambda)=\prod(\lambda-\lambda_i).$$

Аннулятор скобки порождается первыми $(g+1)$ симметрическими полиномами от λ_i.

Пример 4. Гамильтонова структура, порожденная «скрытым изоморфизмом Мозера—Трубовица» [17], [135] (о котором подробнее см. в примерах следующего параграфа) между динамикой КдФ на пространстве конечнозонных потенциалов и системами Неймана (2.183), (2.184):

$$Q=\sqrt{-R(\lambda)}\prod_j(\lambda-\lambda_{2j})\,d\lambda, \tag{2.162}$$

$$A=\{\lambda_0,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_{2g}\}.$$

Пример 5. Интегрируемый случай Горячева—Чаплыгина в динамике твердого тела с неподвижной точкой [54].

Здесь

$$Q(\Gamma,\ \lambda)=\arcsin\frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda^2}{2}-\frac{1}{2}H-\frac{2G}{\lambda}\right),$$

где H — энергия волчка, G — интеграл Горячева—Чаплыгина, μ — параметр. Кривая Γ задается уравнением

$$y^2=4\mu^2\lambda^2-(\lambda^3-H\lambda-4G)^2.$$

Пример 6. В известном *случае Ковалевской* переменные действия ранее не вычислялись. Имеем в обозначениях [54] (и следующего параграфа, см. (2.174), (2.181)):

$$Q(\Gamma,\ \lambda)=\frac{1}{2\sqrt{-\lambda}}\ln\left(\sqrt{-\lambda}\,(\lambda-6h)^2-k^4\right)+\frac{\nu^2}{2\sqrt{-\lambda}}(\lambda-8l^2)+ \\ +\sqrt{-R_5(\lambda)},$$

где R_5 дается (2.181).

Кривая Γ задается уравнением $y^2=R_5(\lambda)$. Интегрируя Q по «вещественным» циклам a_j, на которых лежат $\gamma_j=s_j$ — переменные Ковалевской, получаем переменные действия J_j.

§ 4. Важнейшие примеры систем, интегрируемых в двумерных тэта-функциях

Согласно разобранному в § 2 примеру, гиперэллиптическая кривая Γ рода 2,

$$y^2=R_5(\lambda)=\prod_{i=1}^{5}(\lambda-\lambda_i), \tag{2.163}$$

порождает пару коммутирующих операторов

$$L=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x), \tag{2.164}$$

$$A_5=16\frac{\partial^5}{\partial x^5}+20\left(u\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}u\right)+30u\frac{\partial}{\partial x}u-$$
$$-5\left(u''\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u''\right)+h_1\left[4\frac{\partial^3}{\partial x^3}+3\left(u\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}u\right)\right]+h_2\frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.165)$$

Уравнение коммутативности (2.42) операторов L и A_5 на функцию u может быть записано в лагранжевом виде

$$\delta\int\Lambda dx=0 \quad (2.166)$$

с лагранжианом

$$\Lambda=\frac{u''^2}{2}-\frac{5}{2}u''u^2+\frac{5}{2}u''+h_1\left(\frac{u'^2}{2}+u^3\right)+h_2u^2+h_3u. \quad (2.167)$$

Согласно [44], уравнение (2.166) эквивалентно гамильтоновой системе с двумя степенями свободы и с гамильтонианом

$$H=p_1p_2+V(q_1,\ q_2), \quad (2.168)$$
$$q_1=u,\quad q_2=u''-5u^2,\quad p_1=q_2',\quad p_2=u',$$
$$V=-\frac{q_2^2}{2}-\frac{5}{2}q_2q_1^2-\frac{5}{8}q_1^4+\frac{h_2}{2}q_1^2+h_3q_1. \quad (2.169)$$

(заменой $u\to u+\mathrm{const}$ в уравнениях (2.168), (2.169) константа h_1 занулена).

Интегралы системы (2.168) в инволюции имеют вид $J_1=H$,

$$J_2=p_1^2+2q_1p_1p_2+(2q_2-h_2)p_2^2+D(q_1,\ q_2),$$
$$D=q_1^5+h_2q_1^3-4q_1q_2^2+2h_2q_1q_2+2h_3q_2.$$

Интегралы J_i определяют кривую (2.163). Соответствующий полином R_5 равен

$$R_5=\lambda^5+\frac{h_2}{2}\lambda^3+\frac{h_3}{16}\lambda^2+\left(\frac{J_1}{32}+\frac{h_2^2}{16}\right)\lambda+\frac{J_2-h_2h_3}{256}. \quad (2.170)$$

Результаты § 2 указывают, что координатами на многообразии уровней $J_1=\mathrm{const}$, $J_2=\mathrm{const}$ являются γ_1, γ_2 — положения полюсов соответствующей функции Бейкера—Ахиезера. Их связь с исходными переменными дается с помощью так называемых формул следов

$$\gamma_1+\gamma_2=\frac{u}{2},\quad \gamma_1\gamma_2=\frac{1}{8}(3u^2+u'')+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j, \quad (2.171)$$

где λ_i — нули полинома (2.170).

Уравнения на γ_i, эквивалентные исходной системе, имеют в данном случае вид (см. § 2)

$$\gamma_1'=\frac{2i\sqrt{R_5(\gamma_1)}}{\gamma_1-\gamma_2},\quad \gamma_2'=\frac{2i\sqrt{R_5(\gamma_2)}}{\gamma_2-\gamma_1}. \quad (2.172)$$

Эти уравнения, как уже отмечалось в § 2, линеаризуются *преобразованием Абеля*. Двузонный потенциал $u(x)$ равен (2.123)

$$u(x)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(Ux-\zeta)+\text{const}. \tag{2.173}$$

Далее приводится ряд примеров систем, сводящихся к двузонным потенциалам и интегрируемых, как следствие, в двумерных тэта-функциях.

Задача С. В. Ковалевской. Уравнения движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в случае Ковалевской имеют вид:

$$\begin{cases}2\dot p=qr,\\ 2\dot q=-pr-\mu\gamma_3,\\ \dot r=\mu\gamma_2,\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot\gamma_1=r\gamma_2-q\gamma_3,\\ \dot\gamma_2=p\gamma_3-r\gamma_1,\\ \dot\gamma_3=q\gamma_1-p\gamma_2,\quad \mu=\text{const}.\end{cases} \tag{2.174}$$

(Представление типа Лакса для этой системы было найдено в [82].)

Уравнения (2.170) имеют следующие интегралы

$$\begin{gathered}H=2(p^2+q^2)+r^2-2\mu\gamma_1 \ (\text{энергия}),\\ L=2(p\gamma_1+q\gamma_2)+r\gamma_3 \ (\text{момент импульса}),\\ K=(p^2-q^2+\mu\gamma_1)^2+(2pq+\mu\gamma_2)^2 \ (\text{интеграл Ковалевской}).\end{gathered} \tag{2.175}$$

Кроме того, выполнено условие связи

$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1. \tag{2.176}$$

Рассмотрим совместную поверхность уровня этих интегралов

$$H=6h^2,\quad L=2l,\quad K=k^2. \tag{2.177}$$

При выполнении связи (2.176) эти уравнения задают двумерное инвариантное подмногообразие исходной системы (2.174).

Переменные Ковалевской — координаты на этой поверхности — определяются следующим образом

$$s_{1,2}=3h+\frac{R(x_1,x_2)\mp\sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}, \tag{2.178}$$

где

$$\begin{gathered}x_{1,2}=p\pm iq,\quad R(z)=-z^4+6hz^2+4\mu lz+\mu^2-k^2,\\ R(x_1,x_2)=-x_1^2x_2^2+6x_1x_2h+2\mu l(x_1+x_2)+\mu^2-k^2.\end{gathered} \tag{2.179}$$

Легкое вычисление показывает, что в переменных s_i уравнения (2.174) имеют вид:

$$\dot s_1=\frac{i}{2}\frac{\sqrt{R_5(s_1)}}{s_1-s_2},\quad \dot s_2=\frac{i}{2}\frac{\sqrt{R_5(s_2)}}{s_2-s_1}, \tag{2.180}$$

$$R_5=(\lambda[(\lambda-3h)^2+\mu^2-k^2]-2\mu^2l^2)((\lambda-3h)^2-k^2). \tag{2.181}$$

Эти уравнения с точностью до множителя совпадают с уравнениями (2.172). Следовательно, они линеаризуются заменой Абеля.

Выражение исходных переменных p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 через переменные Ковалевской приведены в [26]. Переменные же s_i, согласно результатам § 2, определяются как решения уравнений

$$\theta(A(s_i)+Ut-\zeta)=0. \tag{2.182}$$

Здесь $A:\Gamma\to J(\Gamma)$ и Γ задано уравнением (2.163) с R_5, равным (2.181).

Задачи Неймана и Якоби. Общая система Гарнье. Уравнения движения частицы на $(n-1)$-мерной сфере

$$x^2=\sum_{i=1}^{n} x_i^2=1 \tag{2.183}$$

под действием квадратичного потенциала

$$U(x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2, \quad a_i=\mathrm{const}, \tag{2.184}$$

имеют вид:

$$\ddot{x}_i=-a_i x_i+u(t)\,x_i, \tag{2.185}$$

где $u(t)$ — множитель Лагранжа, возникающий из-за наложения связей (2.183). Эта система при $n=3$ носит название системы Неймана.

Система Неймана может быть получена из гамильтонова потока на R^6 с гамильтонианом

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} a_i x_i^2+\frac{1}{2}\left(x^2y^2-(xy)^2\right) \tag{2.186}$$

ограничением на поверхность $x^2=1$ $\left(\text{здесь } xy=\sum_i x_i y_i\right)$. Функции

$$F_k(x, y)=x_k^2+\sum_{i\neq k}\frac{x_k y_i-y_k x_i}{a_i-a_k}, \quad k=1, 2, 3, \tag{2.187}$$

являются системой интегралов в инволюции для (2.186). Сам гамильтониан H имеет вид:

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} a_i F_i. \tag{2.188}$$

Преобразование

$$\tilde{x}=y, \quad \tilde{y}=-x, \quad \tilde{H}=\sum_{i=1}^{3}\frac{F_i}{a_i} \tag{2.189}$$

переводит построенный гамильтонов поток в геодезический поток на трехосном эллипсоиде (при $a_i>0$)

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2/a_i = 1.$$

Задача о геодезических на трехосном эллипсоиде называется задачей Якоби.

В работе [135] был установлен траекторный изоморфизм уравнений по x для периодических n-зонных потенциалов оператора Штурма—Лиувилля и уравнений по $t \to x$ для периодических траекторий системы (2.183), (2.184). Полный фазовый изоморфизм систем для n-зонных потенциалов и системы (2.183), (2.184) был доказан в [17]. Тем самым общие решения последней системы выражаются в n-мерных тэта-функциях, а система Неймана (и решения задачи Якоби) в двумерных тэта-функциях.

Заметим, что хотя эти системы траекторно изоморфны, им (как было показано в предшествующем параграфе) отвечают различные гамильтоновы структуры.

Рассмотрим функцию Бейкера—Ахиезера $\psi(x, P)$, отвечающую гиперэллиптической кривой Γ с вещественными точками ветвления, $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{2n+1}$. В § 2 было показано, что она удовлетворяет уравнению

$$\psi''(x, P) = -\lambda\psi(x, P) + u(x)\psi(x, P), \tag{2.190}$$

где $P = (\lambda, \sqrt{R})$ — точка Γ. Обозначим через $\psi^+(x, P) = \psi(x, \sigma(P))$, где σ — инволюция, переставляющая листы Γ. Ее действие на локальный параметр есть $\sigma^*(k) = -k$. Отсюда функция $\psi(x, P)\psi^+(x, P)$ регулярна в бесконечно удаленной точке P_0. Кроме того, она не зависит от выбора листа Γ, значит, является рациональной функцией λ

$$\psi(x, P)\psi^+(x, P) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (\lambda - \gamma_i(x))}{\prod_{i=1}^{n} (\lambda - \gamma_i)}. \tag{2.191}$$

Для любого полинома $P(\lambda)$ степени n (коэффициенты которого могут зависеть от параметров) и любых точек μ_i, $i = 1, \dots$ $\dots, n+1$, имеет место простое тождество

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{P(\mu_i)}{\prod_{j \neq i} (\mu_i - \mu_j)} \equiv 1. \tag{2.192}$$

Так как в точках ветвления $\psi(x, \lambda_i) = \psi^+(x, \lambda_i)$, то из (2.191) и (2.192) вытекает, что функции

$$\varphi_i(x) = \psi(x, \lambda_{2i+1}) \prod_j \left(\frac{\lambda_{2i+1} - \gamma_j}{\lambda_{2i+1} - \lambda_{2j+1}} \right)^{1/2} \tag{2.193}$$

удовлетворяют тождеству

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(x) \equiv 1. \qquad (2.194)$$

Равенства (2.190) и (2.194) совпадают (после переобозначения x на t) с уравнениями (2.185) и (2.183). Выражения через тэта-функции для $\psi(x, P)$, которые были получены в § 2, дают тем самым решения системы (2.183), (2.184).

Для системы Неймана получим, в частности,

$$x_i(t) = \alpha_i \frac{\theta[\nu_i](tU+\zeta)\,\theta(\zeta)}{\theta[\nu_i](\zeta)\,\theta(tU+\zeta)}, \qquad (2.195)$$

где

$$\alpha_i = \prod_{j \neq i} (\lambda_{2i+1} - \lambda_{2j+1})^{-1/2} \qquad (2.196)$$

и характеристики $[\nu_i]$ тэта-функций равны

$$\nu_1 = [(0, 1/2), (0, 0)], \quad \nu_2 = [(1/2, 0), (0, 1/2)], \qquad (2.197)$$
$$\nu_3 = [(0, 0), (1/2, 1/2)].$$

Система (2.183), (2.184) может быть получена из более общей системы, открытой Гарнье [115]

$$\begin{aligned} x_i'' &= x_i\left(\sum x_i y_i + a_i\right), \\ y_i'' &= y_i\left(\sum x_i y_i + a_i\right). \end{aligned} \qquad (2.198)$$

На инвариантной плоскости $x_i = a_i y_i$ как раз получаем систему Неймана на сфере. Другой интересный случай — это система ангармонических осцилляторов, получающаяся из (2.198) ограничением на плоскость $x_i = y_i$, [116].

Система Гарнье эквивалентна (при подходящем выборе параметра τ) условиям коммутации

$$\frac{dA(\lambda)}{d\tau} = [A(\alpha), A(\lambda)]/\lambda - \alpha, \qquad (2.199)$$

где матрица $A = (A_{ij})$ имеет вид:

$$A_{11} = \lambda^2 - \sum x_i y_i, \qquad (2.200)$$
$$A_{1i} = x_{i-1}\lambda + x'_{i-1}, \quad A_{i1} = y_{i-1}\lambda - y'_{i-1},$$
$$A_{ij} = x_{i-1} y_{i-1} - a_{i-1}\delta_{ij}, \quad i, j \geqslant 2.$$

Движение тела в идеальной жидкости. Интегрирование случая Клебша. Как уже говорилось в главе 1, уравнения движения твердого тела в идеальной жидкости имеют вид:

$$\dot{p} = p \times \frac{\partial H}{\partial M}, \quad \dot{M} = p \times \frac{\partial H}{\partial p} + M \times \frac{\partial H}{\partial M}, \qquad (2.201)$$

где $H=H(M, p)$ — гамильтониан (1.48),

$$M=\{M_1, M_2, M_3\}; \quad p=\{p_1, p_2, p_3\};$$

$$\frac{\partial H}{\partial M}=\left\{\frac{\partial H}{\partial M_i}\right\}; \quad \frac{\partial H}{\partial p}=\left\{\frac{\partial H}{\partial p_i}\right\}. \tag{2.202}$$

Ниже мы приведем коммутационные представления уравнений (2.201) в интегрируемых случаях Клебша и Ляпунова—Стеклова—Колосова (см. (1.205)—(1.209)).

Коммутационное представление для системы Клебша было найдено в [80]. Матрица L имеет вид:

$$L=\lambda A+L_0-\lambda^{-1}P, \tag{2.203}$$

$$L_0=\begin{pmatrix} 0, & M_3, & -M_2 \\ -M_3, & 0, & M_1 \\ M_2, & -M_1, & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{ij}=p_ip_j; \quad A_{ij}=a_i\delta_{ij}. \tag{2.204}$$

Матрица M равна

$$M=\lambda C+\begin{pmatrix} 0, & a_3M_3, & -a_2M_2 \\ -a_3M_3, & 0, & a_1M_1 \\ a_2M_2, & -a_1M_1, & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.205}$$

$C_{ij}=c_i\delta_{ij}$.

Случай Клебша является пределом при контракции группы so(4) к $E(3)$ интегрируемых волчков, найденных в [71] и рассматриваемых в следующем пункте. Если зафиксировать в алгебре so(4) базис с коммутационными соотношениями

$$\{M_i, M_j\}=\varepsilon_{ijk}M_k; \ \{M_i, p_j\}=\varepsilon_{ijk}p_k; \ \{p_i\ p_j\}=\varepsilon_{ijk}M_k, \tag{2.206}$$

то этой контракции отвечает предельный переход, при котором

$$M_i=M_i', \ p_i\to Np_i', \ N\to\infty.$$

Пара Лакса (2.212) для волчков на so(4) при контракции расходится, хотя ее интегралы выдерживают этот переход и совпадают после него с интегралами случая Клебша. С другой стороны, пара (2.203)—(2.205) не выдерживает деформации so(4) в $e(3)$. Интересно отметить, что между этими системами имеется не только указанная выше связь. Как было найдено в [3], [7], уравнения Кирхгофа для случая Клебша переходят в уравнения Манакова для алгебры so(4) (см. ниже) после подходящей линейной замены переменных. Аналогичная линейная замена переводит интегрируемый случай Ляпунова—Стеклова—Колосова (см. ниже) в интегрируемый случай Стеклова [139] для вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной жидкостью [7].

Случай Клебша был проинтегрирован в [88], [119], [140].

Случай Ляпунова—Стеклова— Колосова. В этом случае гамильтониан, с учетом (1.208), имеет вид:

$$2H=\sum_{\alpha=1}^{3} b_\alpha (M_\alpha-(b_1+b_2+b_3-b_\alpha)\sigma p_\alpha)^2+$$

$$+A\sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha^2+B\sum_{\alpha=1}^{3} p_\alpha M_\alpha. \qquad (2.207)$$

Положим

$$2z_\alpha=M_\alpha-\sigma(b_1+b_2+b_3-b_\alpha)\,p_\alpha. \qquad (2.208)$$

Четвертый интеграл имеет вид:

$$2I=\sum_{\alpha=1}^{3} b_\alpha p_\alpha^2. \qquad (2.209)$$

Случай Ляпунова—Стеклова—Колосова проинтегрирован в работе [120]. Любопытно, что в этой работе для этой системы фактически использовалось между строк коммутационное представление с эллиптическим спектральным параметром.

Представление Кёттера (F. Kötter) для уравнений движения имело вид:

$$\frac{d}{dt}(z_1+\sigma s p_1)=2(s-b_2)(z_2+s\sigma p_2)\frac{b_3 z_3}{s}-2(s-b_3)(z_3+s\sigma p_3)\frac{b_2 z_2}{s}$$

(остальные уравнения имеют тот же вид с точностью до циклической перестановки индексов).

Здесь s — «спектральный параметр». Эти уравнения, как несложно проверить, эквивалентны лаксову уравнению $\dot{L}=[L, M]$, где

$$L=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c_3}v_3 & -\sqrt{c_2}v_2 \\ -\sqrt{c_3}v_3 & 0 & \sqrt{c_1}v_1 \\ \sqrt{c_2}v_2 & -\sqrt{c_1}v_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M=\frac{2}{s}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c_1c_2}b_3z_3 & -\sqrt{c_1c_3}b_2z_2 \\ -\sqrt{c_1c_2}b_3z_3 & 0 & \sqrt{c_2c_3}b_1z_1 \\ \sqrt{c_1c_3}b_2z_2 & -\sqrt{c_2c_3}b_1z_1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.210)$$

Здесь $v_i=z_i+\sigma s p_i$, $c_i=s-b_i$.

Положим $e_i=b_i-\frac{1}{3}(b_1+b_2+b_3)$, $s=\wp(\lambda)+\frac{b_1+b_2+b_3}{3}$, где $\wp$ — функция Вейерштрасса, отвечающая эллиптической кривой Γ с точками ветвления e_i. Тогда L, M — эллиптические функции от λ, определенные на Γ.

Случаи Клебша и Ляпунова—Стеклова—Колосова исчерпывают все возможности, когда у системы (2.207) с гамильтонианом (2.203) существует четвертый квадратичный по (l, p) интеграл [80]. Отметим, что для общих диагональных метрик, как показано в [55], для уравнений движения (за исключением случая Клебша) имеет место расщепление сепаратрис, т. е. они неинтегрируемы.

Многомерное свободное твердое тело. Уравнения многомерного твердого тела имеют вид [1]:

$$\dot{M}=[\Omega, M], \quad M=J\Omega+\Omega J \tag{2.211}$$

и $J_{ij}=J_i\delta_{ij}$ — оператор инерции твердого тела. Полная интегрируемость этой системы при всех n доказана в [71][1]. Как было замечено в этой работе, система (2.211) эквивалентна системе

$$[A, \dot{V}]=[[A, V], [B, V]], \tag{2.212}$$

$$[B, V]=\Omega, \quad A=J^2, \quad B=J. \tag{2.213}$$

Коммутационное представление для (2.211) имеет вид:

$$\left[\frac{d}{dt}-[B, V]+\lambda B, \lambda A-[A, V]\right]=0.$$

Согласно результатам § 2, общие решения выражаются через тэта-функции римановых поверхностей Г вида

$$\det(\lambda A-[A, V)-\mu\cdot 1)=0. \tag{2.214}$$

Строгое и абстрактное изложение теории Манакова и прямая проверка независимости построенных интегралов Манакова (коэффициентов характеристического многочлена (2.214)), не опирающаяся на спектральную теорию операторов, были осуществлены в работе [75]. Переносу этой техники на некоторые другие алгебры Ли был посвящен ряд последующих работ, обзор которых дан в [90]. Исследование динамики этих систем не только в алгебре Ли, но и во всей группе Ли было дано в работе [73].

Уравнения (2.212) были проинтегрированы (для любых A и B) в работе [32]. Как было замечено в [71], для общих диагональных матриц A и B уравнения (2.212) совпадают с уравнениями движения на $SO(N)$ с диагональной метрикой

$$\omega_{ij}=\frac{a_i-a_j}{b_i-b_j},$$

которые при $N=4$ переходят при контракции $SO(4)$ в $E(3)$ в интегрируемый случай Клебша.

Решения общих уравнений (2.212):

$$v_{ij}=\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\frac{\theta(A(P_i)-A(P_j)+tU+\zeta)}{\theta(tU+\zeta)\varepsilon(P_i, P_j)}, \quad i\neq j, \tag{2.215}$$

$$\varepsilon(P, Q)^{-1}=\frac{\sqrt{\partial_{U(P)}\theta[\nu](0)\,\partial_{U(Q)}\theta[\nu](0)}}{\theta[\nu](A(P)-A(Q))},$$

$$\lambda_i=\lambda_i^0\exp\left(t\sum_{k\neq i}c_i^k b_k\right),$$

$$c_i^k=-\frac{\partial}{\partial P}\ln\varepsilon(P, P_i)\,|_{P=P_i}.$$

---

[1] При $n=4$ — в [74].

Здесь λ_i^0 — произвольные ненулевые константы, θ-функция построена по кривой вида (2.214); P_i — бесконечно удаленные точки этой кривой, где $\mu/\lambda \to a_i$ при $P \to P_i$; вектор U имеет вид:

$$U = \sum_j b_j U(P_j),$$

$U(P)$ — вектор периодов дифференциала $\Omega_P^{(2)}$ с двойным полюсом в P, $[v]$ — любой невырожденный ($\operatorname{grad}\theta[v](0) \neq 0$) нечетный полупериод.

Волны в уравнении Ландау—Лифшица. Рассмотрим, следуя [19], решения типа бегущей волны

$$S(x, t) = q(x - at)$$

для уравнения Ландау—Лифшица (2.51).

Имеем

$$-a\dot{q} = q \times (\ddot{q} + Jq). \tag{2.216}$$

Умножая это равенство векторно на q и используя условие $q^2 = 1$, получим

$$\ddot{q} + Jq = \lambda q + a\dot{q} \times q, \quad \lambda = (q, Jq) - \dot{q}^2.$$

Введем переменную

$$M = \dot{q} \times q + aq,$$

тогда уравнение (2.216) окажется эквивалентным уже разобранной системе Клебша (2.204)

$$\dot{M} = M \times Jq,$$
$$\dot{q} = q \times M.$$

В работе [8] в терминах тэта-функций Прима построены, исходя из лаксовой пары (2.52) для уравнений Ландау—Лифшица (2.51), конечнозонные решения. Как частный случай они содержат и решения типа бегущей волны.

Обобщением уравнений Ландау—Лифшица являются уравнения

$$\begin{aligned} u_t &= u \times (u_{xx} + Jv), \\ v_t &= v \times (v_{xx} + Ju), \end{aligned} \tag{2.217}$$

рассмотренные в [16] и описывающие двухподрешеточную систему. В [16] показано, что уравнения, описывающие бегущую волну

$$u = u(x - at), \quad v = v(x - at),$$

интегрируются. Они соответствуют гамильтоновой системе на $E(3) + E(3)$ с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(M^2 + N^2 + 2(Jp, q)). \tag{2.218}$$

Здесь $p(\xi)=u(\xi)$, $q(\xi)=v(\xi)$ и $M=u\times u_\xi+au$, $N=v\times v_\xi+$ $+av$. Пары p, M и q, N удовлетворяют коммутационным соотношениям E (3).

Матрицы L и A, входящие в коммутационное представление для уравнений движения системы (2.218), имеют блочный вид

$$L=\begin{pmatrix} \lambda\hat{M} & \lambda^2 p_i q_j+J_i\delta_{ij} \\ \lambda^2 q_i p_j+J_i\delta_{ij} & \lambda\hat{N} \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \lambda p_i q_j \\ \lambda q_i p_j & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\hat{M}$ и $\hat{N}$ — кососимметрические 3×3 матрицы, каноническим образом соответствующие векторам $\{M_i\}$, $\{N_i\}$.

Волчок в гравитационном поле. Рассмотрим, следуя [10], задачу о вращении волчка, закрепленного в центре тяжести, в гравитационном поле, создаваемом произвольным телом V. Пусть $\rho(x)$ — плотность массы для тела V в его точке x, $R(x)$ — расстояние от точки x до точки закрепления волчка. Уравнения запишем в системе координат S, жестко связанной с волчком, причем оси этой системы направим вдоль главных осей инерции, т. е. оператор инерции I волчка диагональный, $I=(I_i\delta_{ij})$. Будем предполагать размеры волчка малыми, по сравнению с расстояниями $R(x)$ до тела V. В этом приближении уравнения вращения волчка запишутся в виде

$$\dot{M}=M\times\omega+\int\limits_V 3G\rho(x)R^{-3}(x)\gamma(x)\times I\gamma(x)\,d^3x, \tag{2.219}$$

где $\gamma(x)$ — единичный вектор направления, идущего из точки x тела к волчку (записанный в системе S!), M и ω — векторы момента и угловой скорости, G — гравитационная постоянная. Уравнения (2.219) дополним очевидным соотношением

$$\dot{\gamma}(x)=\gamma(x)\times\omega. \tag{2.220}$$

Покажем, что уравнения (2.219), (2.220) интегрируемы, причем процедура интегрирования не зависит от тела V.

Сопоставим векторам $\gamma(x)=(\gamma_i(x))$, $M=(M_i)$, $\omega=(\omega_i)$ кососимметрические матрицы $\hat{\gamma}(x)=(\hat{\gamma}_{ij}(x))$, $\hat{M}=(\hat{M}_{ij})$, $\hat{\omega}=(\hat{\omega}_{ij})$, полагая $\hat{\gamma}_{ij}(x)=\varepsilon_{ijk}\gamma_k(x)$ и т. д. Введем, далее, матрицу

$$u(x)=\int\limits_V 3G\rho(x)R^{-3}(x)\hat{\gamma}^2(x)\,d^3x.$$

Уравнения (2.219), (2.220) запишутся в виде системы

$$\begin{cases}\dot{\hat{M}}=[\hat{M},\hat{\omega}]+[u,C], \\ \dot{u}=[u,\hat{\omega}, \end{cases}\quad \hat{M}=I\hat{\omega}+\hat{\omega}I. \tag{2.221}$$

Здесь C-diag(C_1, C_2, C_3). Система (2.221) является гамильтоновой на алгебре Ли, элементами которой являются пары 3×3-матриц (ω, u), где ω — кососимметрическая, а u — симметрическая матрица, а коммутаторы имеют вид:

$$[\omega_1, \omega_2] = \omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1, \quad [\omega, u] = \omega u - u\omega, \quad [u_1, u_2] = 0.$$

Гамильтониан имеет вид $H = \mathrm{Sp}\left(\frac{1}{2}\hat{M}\hat{\omega} + uC\right)$. Представление Лакса для системы (2.221), найденное в [10], имеет вид $\dot{L} = [L, A]$, где

$$L(\lambda) = \hat{M} + \lambda B + \lambda^{-1}u, \quad A(\lambda) = \hat{\omega} + \lambda C, \tag{2.222}$$
$$B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3), \quad B_i = I_1 I_2 I_3 I_i^{-1},$$

причем для упрощения формул мы считаем, что $I_1 + I_2 + I_3 = 0$. Отсюда вытекает, что система (2.221) интегрируется в тэта-функциях римановой поверхности Γ, заданной уравнением $\det(L(\lambda) - \mu\cdot 1) = 0$. На поверхности Γ рода 4 действует очевидная инволюция вида $(\lambda, \mu) \mapsto (-\lambda, -\mu)$ с шестью неподвижными точками, отвечающими $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Поэтому эта поверхность двулистно накрывает эллиптическую кривую, и фазовые переменные системы (2.221) могут быть выражены через тэта-функции Прима (трех переменных) этого накрытия.

Другое применение систем вида (2.221) — это доказательство интегрируемости задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле с произвольным квадратичным потенциалом $U = 2^{-1}a_{ij}x^i x^j$ [10] (возможность применения L—A-пары типа (2.222) к задаче о волчке в поле квадратичного потенциала отмечалась в [83]). Здесь уравнения движения записываются в виде (2.221), где матрица u строится так. Пусть Q — матрица перехода от S-системы к неподвижной системе. Тогда $u = Q^T a Q$, где $a = (a_{ij})$.

§ 5. Полюсные системы

Программа исследований динамики полюсов решений уравнений, к которым применим метод обратной задачи, восходит к работе [121]. В двумерной гидродинамике полюса решений отвечают динамике вихрей. В случае конечного числа вихрей соответствующая система оказывается конечномерной гамильтоновой системой.

Впервые связь динамики полюсов рациональных и эллиптических решений уравнения КдФ и уравнений движения системы (2.57) была обнаружена в работе [96].

Заметим, что впервые эллиптические решения уравнения КдФ вида

$$u(x, t) = 2\wp(x - x_1(t)) + 2\wp(x - x_2(t)) + 2\wp(x - x\ (t))$$

без всякой связи с конечномерными системами были построены в работе [41].

Первоначально теория интегрируемых методом L, A пар *систем Мозера—Калоджеро* (2.57) и их обобщений, которые будут подробно обсуждены во второй части работы, развивалась без использования прямой связи с решениями волновых уравнений в частных производных типа КдФ, к которым применим метод обратной задачи. Построение решений уравнений движений этих систем основывалось на теории алгебр Ли. Для системы (2.57) в вырожденных случаях $\wp$-функции Вейерштрасса — потенциалах x^{-2} или $sh^{-2}x$ было доказано, что координаты частиц $x_j(t)$ являются собственными числами матрицы, линейно зависящей от t, т. е.

$$\mathrm{const}\times\prod_j (x-x_j(t))=\det(At+B) \qquad (2.223)$$

(матричные элементы A и B явно выражаются через начальные координаты и импульсы частиц).

В эллиптическом же случае была известна лишь инволютность и независимость интегралов

$$J_k=\frac{1}{k}\operatorname{tr} L^k, \qquad (2.224)$$

где L дается в (2.58), $J_2=H$.

В уже упомянутой выше работе [96] было показано, что динамика полюсов $x_j(t)$ рациональных по x решений уравнения КдФ, которые обязаны иметь вид

$$u(x, t)=2\sum_{j=1}^{N} (x-x_j(t))^{-2}, \qquad (2.225)$$

совпадает с гамильтоновым потоком, порожденным интегралом J_3, ограниченным на неподвижные точки исходной системы $\operatorname{grad} H=0$. Необходимость ограничения потока на стационарные точки, $\operatorname{grad} H=0$, приводит и к ограничению на число частиц, которое могло иметь лишь вид $N=d(d+1)/2$.

Связь между рациональной системой Мозера—Калоджеро и рациональными решениями нелинейных уравнений оказывается более естественной в случае двумерных систем.

Как было замечено в [59], все рациональные по x решения уравнения КП

$$\frac{3}{4}u_{yy}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u_t+\frac{1}{4}(u_{xxx}-6uu_x)\right), \qquad (2.226)$$

убывающие при $|x|\to\infty$, имеют вид $u=2\sum_{j=1}^{N}(x-x_j(y, t))^{-2}$.

При этом динамика полюсов $x_j(y, t)$ по y и t отвечает двум коммутирующим потокам $J_2=H$, J_3 (2.224). Число N произвольно. Используя эту связь в [59], было доказано, что конструкция [59] дает все рациональные решения уравнения КП.

Рациональные многосолитонные решения для уравнения КП в рамках метода обратной задачи рассеяния были построены в [102].

В работе [106] указанный в [59] изоморфизм двух задач был перенесен и на эллиптический случай. Однако вплоть до [61] обе задачи—построение переменных типа углов для системы (2.57) и интегрирование ее уравнений движения в терминах тэта-функций, а также задача построения эллиптических решений уравнения КП — оставались полностью нерешенными (кроме простейшего двухчастичного случая).

В основе работы [61], где эти задачи были решены, лежало найденное коммутационное представление для уравнений движения

$$\ddot{x}_i=4\sum_{j\neq i}\wp(x_i-x_j) \tag{2.227}$$

системы (2.57). Это коммутационное представление (в отличие от (2.58), (2.59)) содержит спектральный параметр, определенный на эллиптической кривой Г. Причем по этому параметру матричные элементы U и V являются функциями Бейкера—Ахиезера.

Определим матрицы

$$U_{ij}=\dot{x}_i\delta_{ij}+2(1-\delta_{ij})\Phi(x_{ij},\lambda), \tag{2.228}$$

$$V_{ij}=\delta_{ij}\Big(2\sum_{k\neq i}\wp(x_{ik})-\wp(\lambda)\Big)+2(1-\delta_{ij})\Phi'(x_{ij},\lambda), \tag{2.229}$$

где

$$\Phi(z,\lambda)=\frac{\sigma(z-\lambda)}{\sigma(\lambda)\sigma(z)}e^{\zeta(\lambda)z}, \tag{2.230}$$

$$\Phi'(z,\lambda)=\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z,\lambda) \tag{2.231}$$

и $x_{ij}(t)=x_i(t)-x_j(t)$.

Предложение. Уравнения (2.227) эквивалентны коммутационному уравнению

$$U_t=[V,U]. \tag{2.232}$$

Из (2.232) следует, что функция

$$R(k,\lambda)=\det(2k+U(\lambda,t)) \tag{2.233}$$

не зависит от t. Матрица U, имеющая существенные особенности при $\lambda=0$, может быть представлена в виде

$$U(\lambda,t)=g(\lambda,t)\tilde{U}(\lambda,t)g^{-1}(\lambda,t), \tag{2.234}$$

где $\tilde{U}$ не имеет существенной особенности при $\lambda=0$, а $g_{ij}=\delta_{ij}\exp(\zeta(\lambda)x_i)$. Следовательно, $r_i(\lambda)$ — коэффициенты выражения

$$R(k, \lambda)=\sum_{i=0}^{n} r_i(\lambda) k^i, \qquad (2.235)$$

являются эллиптическими функциями с полюсами в точке $\lambda=0$. Функции $r_k(\lambda)$ представимы в виде линейной комбинации $\wp$-функции и ее производных. Коэффициенты такого разложения являются интегралами системы (2.57). Каждый набор фиксированных значений этих интегралов задает уравнением $R(k, \lambda)=0$ алгебраическую кривую Γ_n, которая n-листно накрывает исходную эллиптическую кривую Γ.

В общем положении род возникающей кривой равен n. Якобиан кривой Γ_n изоморфен многообразию уровней интегралов r_n, а переменные на нем суть переменные типа углов.

Дальнейшая эффективизация решения уравнений (2.227) использует связь уравнения (2.232) с наличием у нестационарного уравнения Шрёдингера с эллиптическим потенциалом решений специального вида.

Теорема 2.9. Уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\sum_{i=1}^{n}\wp(x-x_i(t))\right)\psi=0 \qquad (2.236)$$

имеет решение ψ вида

$$\psi=\sum_{i=1}^{n} a_i(t, k, \lambda)\,\Phi(x-x_i, \lambda)\,e^{kx+k^2t} \qquad (2.237)$$

тогда и только тогда, когда $x_i(t)$ удовлетворяют уравнениям (2.227).

Здесь $\Phi(z, \lambda)$ дается формулой (2.230).

Функция ψ вида (2.237), как функция переменной x, имеет простые полюса в точках $x_i(t)$. Подставляя ее в (2.236) и приравнивая нулю коэффициенты при $(x-x_i)^{-2}$ и $(x-x_i)^{-1}$, получим, что ψ тогда и только тогда удовлетворяет (2.236), когда вектор $a=(a_1, \ldots, a_N)$ удовлетворяет уравнениям

$$U(\lambda, t)\,a=-2ka, \qquad (2.238)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+V(\lambda, t)\right)a=0, \qquad (2.239)$$

где U и V — те же, что и в (2.228), (2.229).

Аналогично § 2, выясняются аналитические свойства a на римановой поверхности Γ_n. Сформулируем окончательное утверждение.

Теорема 2.10. Собственная функция $\psi(x, t, \gamma)$ нестационарного уравнения Шрёдингера (2.236) определена на n-листной накрывающей Γ_n исходной эллиптической кривой. Функция ψ является функцией Бейкера—Ахиезера с единственной существенной особенностью вида

$$\exp\left(n\lambda^{-1}(x-x_1(0))+n^2\lambda^{-2}t\right)$$

в выделенном прообразе P_0 на Γ_n точки $\lambda=0$.

Явные выражения для $\psi(x, t, \gamma)$, которые были получены в § 2, дают, что полюса ψ по x совпадают с нулями функции $\theta(U^{(2)}x+U^{(3)}t+\zeta)$. Сравнивая с теоремой 2.9, окончательно получим.

Теорема 2.11. Пусть Γ_n задается уравнением $R(k, \lambda)=0$, где R определено в (2.233). Тогда уравнение по x

$$\theta(U^{(2)}x+U^{(3)}t+\zeta)=0 \tag{2.240}$$

имеет в элементарной ячейке с периодами 2ω, $2\omega'$ n корней — $x_i(t)$, которые удовлетворяют уравнению (2.227).

Здесь θ — тэта-функция Римана, отвечающая поверхности Γ_n, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$ — периоды дифференциалов второго рода с полюсами второго и третьего порядков в отмеченной точке P_0. Эти величины выражаются через интегралы r_i уравнений (2.297). Вектор ζ в (2.240) произволен и отвечает переменным типа углов.

Все параметры в (2.240) выражаются в квадратурах через $x_i(0)$ и $\dot{x}_i(0)$.

§ 6. Интегрируемые системы и алгебро-геометрическая спектральная теория линейных периодических операторов

Первоначальный подход к построению конечнозонных решений уравнений КдФ, нелинейного Шрёдингера и ряда других основывался на спектральной теории линейных операторов с периодическими коэффициентами (см. [33], [37], [44], [50], [72], [76], [123], [131]). Именно с этим подходом связан термин «конечнозонные решения». Кратко укажем на взаимосвязь такого подхода с алгебро-геометрическим, который был изложен в § 2.

Пусть $U(x, t, \lambda)$ и $V(x, t, \lambda)$ — решения уравнений нулевой кривизны, периодически зависящие от x. Рассмотрим матрицу

$$W(x, t, \lambda)=\Psi(x+T, t, \lambda)\Psi^{-1}(x, t, \lambda), \tag{2.241}$$

где T — период, а Ψ — решение уравнений (2.36). Эта матрица называется матрицей монодромии (описывающей сдвиг на период решений линейных уравнений (2.36)).

Из того, что $\Psi(x+T, t, \lambda)$ является также решением уравнений (2.36), следует, что

$$[\partial_x-U, W]=[\partial_t-V, W]=0,$$

и мы приходим к уравнениям (2.64), (2.65).

Матрица $W(x, t, \lambda)$ является аналитической вне полюсов U и V, где она в общем положении имеет существенные особенности.

Векторная *функция* $\psi(x, t, \gamma)$, определенная равенствами (2.1)—(2.7), является собственной функцией оператора сдвига на период и называется *блоховской*. Риманова поверхность Г, на которой становится однозначной блоховская функция, имеет в общем случае бесконечный род (ее точки ветвления накапливаются к полюсам U и V).

Конечнозонные периодические решения выделяются условием конечности рода поверхности Г, что эквивалентно рациональности по λ матрицы монодромии $W(x, t, \lambda)$.

Таким образом, периодические решения уравнений (2.37), (2.64), (2.65) обладают тем свойством, что соответствующая им блоховская функция определена на римановой поверхности конечного рода и совпадает с *функцией Клебша—Гордана—Бейкера—Ахиезера.*

Ясно, что понятие конечнозонности дословно переносится на любой линейный оператор $\partial_x - U(x, \lambda)$ безотносительно к нелинейным уравнениям. Соответствующие матрицы U называются конечнозонными потенциалами.

Кратко спектральные свойства оператора Штурма—Лиувилля с конечнозонными потенциалами (полученные в работах, изложенных в [37], [44]), были приведены в § 2.

Ниже, мы подробнее опишем эти свойства и дадим наброски доказательств основных утверждений на примере спектральной теории разностного оператора Шрёдингера (2.20)

$$L\psi_n = c_n\psi_{n+1} + v_n\psi_n + c_{n-1}\psi_{n-1} \tag{2.242}$$

($c_n = c_{n+N} \neq 0$, $v_n = v_{n+N}$), который входит в представление Лакса для уравнений цепочки Тоды и для разностного уравнения КдФ (при $v_n \equiv 0$).

Замечание. В последние годы были обнаружены новые замечательные приложения алгебро-геометрической спектральной теории к задачам Пайерлса—Фрелиха, относящимся к числу наиболее фундаментальных в теории квазиодномерных проводников. В континуальном пределе эта модель исследовалась в работах [4], [14], где впервые и была обнаружена связь модели Пайерлса с теорией *конечнозонных операторов* Штурма—Лиувилля. В полном объеме эта теория (формулы для вариационных производных интегралов Крускала, вариации по группе периодов) была впервые применена в [4]. Последние работы послужили отправной точкой дальнейших исследований [15], [27], [28], [60], в которых эти результаты были перенесены на дискретную модель Пайерлса и значительно развиты.

Модель Пайерлса—Фрелиха (R. Peierls—Frölich) описывает самосогласованное поведение решетки атомов с координатами

$x_n < x_{n+1}$ и электронов. Есть две модели. В первой атом в каждом узле обладает еще внутренней степенью свободы: v_n. Во второй модели — $v_n \equiv 0$.

Электронные уровни определяются как точки $E_1 < E_2 \leqslant \ldots \ldots \leqslant E_N$ спектра периодической задачи оператора L, имеющего вид (2.242), где $c_n = \exp(x_n - x_{n+1})$, $c_n = c_{n+N}$, $v_n = v_{n+N}$. Энергия системы состоит из энергии электронов, которые при нулевой температуре занимают m нижних уровней и упругой энергии решетки:

$$H = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{m} E_i + \sum_{n=0}^{N-1} \Phi(c_n, v_n) \right).$$

Здесь m — число электронов, $\Phi(c_n, v_n)$ — потенциал упругой энергии.

В [15] был рассмотрен случай

$$\sum_n \Phi(c_n, v_n) = \varkappa \sum_n [(v_n^2 + 2c_n^2) - P \ln c_n]$$

и более общий

$$\sum_n \Phi(c_n, v_n) = \sum_{k=1}^{l} \varkappa_k I_k,$$

где I_k — интегралы цепочки Тоды или цепочки Лэнгмюра (J. Langmuir) ($v_n \equiv 0$).

В первом случае было доказано, что $H(c_n, v_n)$ имеет единственную экстремаль, которой соответствует однозонный оператор L.

В континуальном пределе эта экстремаль переходит в экстремали, найденные в [5], [14], что доказывает, что в этих работах было найдено основное состояние.

Для более общих моделей были исследованы устойчивости экстремалей и найдено основное состояние. Кроме того, были найдены скорости звука и волны зарядовой плотности.

Впервые последовательное построение алгебро-геометрической спектральной теории Блоха—Флоке в $\mathscr{L}_2(Z)$ разностного оператора Шрёдингера (2.242) было начато С. П. Новиковым [37, гл. 3, § 1] и Танакой—Дейтом (S. Tanaka—E. Date) [108]. При помощи формул следов для функции $\chi_n = \psi_{n+1}/\psi_n$ были получены формулы для v_n. В [37] изучен также симметричный случай, $v_n = 0$. Эта теория в [37] доведена до конца, однако лишь в эллиптическом случае. В работе [108] выражения для v_n написаны в виде

$$v_n = \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\theta(\mathrm{U}n + Vt + Z)}{\theta(U(n+1) + Vt + Z)} + \mathrm{const}. \qquad (2.243)$$

(В [37] допущена незначительная неточность, исправленная в книге [44].)

В случае цепочки Тоды, в силу условия $\dot{x}_n = v_n$, формула (2.243) определяет $x_n(t)$ с точностью до набора чисел $x_n(0)$,

$-\infty<n<\infty$. Вопрос о разностном КдФ в [108] не рассматривался.

Эти исследования получили завершение в [63], в которой получены явные выражения для x_n и решений разностного КдФ. Идея [63] состоит в использовании явных выражений для ψ_n через тэта-функции и аналогов «тождеств следов» для ψ_n, в отличие от [37], [108], где, как уже говорилось, использовались формулы следов для χ_n, аналогично непрерывному. В более поздней работе [62] были найдены явно «локальные тождества следов» $c_n=c_n(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, существование которых было неэффективно доказано в [37].

Основой современного подхода к спектральным задачам для периодических операторов является исследование аналитических свойств решений уравнения

$$L\psi_n=E\psi_n \tag{2.244}$$

(здесь L — оператор (2.242) с периодическими коэффициентами) при всех, в том числе и комплексных значениях параметра E.

Для любого E пространство решений уравнения (2.244) двумерно. Задав произвольные значения ψ_0 и ψ_1, все остальные значения ψ_n можно найти рекуррентным образом. Стандартный базис $\varphi_n(E)$ и $\theta_n(E)$ задается условиями: $\varphi_0=1$, $\varphi_1=0$, $\theta_0=0$, $\theta_1=1$. Из рекуррентной процедуры вычисления $\varphi_n(E)$ и $\theta_n(E)$ следует, что они $(n>0)$ являются полиномами по E

$$\varphi_n(E)=\frac{c_0}{c_1\ldots c_{n-1}}\left(E^{n-2}-\left(\sum_{k=2}^{n-1}v_k\right)E^{n-3}+\ldots\right),$$

$$\theta_n(E)=\frac{1}{c_1\ldots c_{n-1}}\left(E^{n-1}-\left(\sum_{k=1}^{n-1}v_k\right)E^{n-2}+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{0<i<j}^{n-1}v_iv_j-\sum_{k=1}^{n-3}c_k^2\right)E^{n-3}+\ldots\right). \tag{2.245}$$

Матрица $W(E)$ оператора монодромии $\hat{T}:y_n\to y_{n+N}$ в базисе φ_n и θ_n имеет вид:

$$W(E)=\begin{pmatrix}\varphi_N(E) & \theta_N(E)\\ \varphi_{N+1}(E) & \theta_{N+1}(E)\end{pmatrix}. \tag{2.246}$$

Из (2.247) легко следует, что для любых двух решений этого уравнения, в частности для φ и θ, выражение (аналог Вронскиана)

$$c_n(\varphi_n\theta_{n+1}-\varphi_{n+1}\theta_n) \tag{2.247}$$

не зависит от n. Так как $c_0=c_N$, то

$$\det W=\varphi_N\theta_{N+1}-\varphi_{N+1}\theta_N=\varphi_0\theta_1-\theta_0\varphi_1=1. \tag{2.248}$$

Собственные значения w оператора монодромии определяются из характеристического уравнения

$$w^2-2Q(E)w+1=0, \quad 2Q(E)=\varphi_N(E)+\theta_{N+1}(E). \tag{2.249}$$

Полином Q имеет степень N и его старшие члены имеют вид

$$2Q(E)=\frac{1}{c_0\ldots c_{N-1}}\left(E^N-\left(\sum_{k=0}^{N-1}v_k\right)E^{N-1}+\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{i<j}v_iv_j-\sum_{k=0}^{N-1}c_k^2\right)E^{N-2}+\ldots\right). \tag{2.250}$$

Спектры $E_i^\pm$ периодической и антипериодической задач для L определяются из уравнений $Q(E_i^\pm)=\pm1$, так как при этом $w=\pm1$.

Обозначим через E_i, $i=1,\ldots,2q+2$, $q\leqslant N-1$, простые точки спектра периодической и антипериодической задач для L, т. е. простые корни уравнения

$$Q^2(E)=1. \tag{2.251}$$

Для точки E общего положения уравнение (2.249) имеет два корня w и w^{-1}. Каждому корню отвечает единственный собственный вектор, нормированный условием $\psi_0=1$

$$L\psi_n=E\psi_n, \quad \psi_{n+N}=w\psi_n. \tag{2.252}$$

Это решение называется блоховским.

Теорема 2.12. Двузначная функция $\psi_n^\pm(E)$ является однозначной мероморфной функцией $\psi_n(P)$ на гиперэллиптической кривой Γ, $P\in\Gamma$, отвечающей римановой поверхности функции $\sqrt{R(E)}$

$$R(E)=\prod_{i=1}^{2q+2}(E-E_i). \tag{2.253}$$

Вне бесконечно удаленных точек она имеет q полюсов $\gamma_1,\ldots,\gamma_q$ В окрестности бесконечно удаленных точек

$$\psi_n^\pm(E)=e^{\pm x_n}E^{\pm n}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s^\pm(n)E^{-s}\right). \tag{2.254}$$

Здесь знаки $\pm$ отвечают верхнему и нижнему листам поверхности Γ (верхним будет называться лист, на котором в бесконечности $\sqrt{R}\sim E^{q+1}$).

Блоховское решение, как и любое другое решение уравнения (2.244), имеет вид $\psi_n=\psi_0\varphi_n+\psi_1\theta_n$. Вектор (ψ_0, ψ_1) является собственным для матрицы W. Значит $\psi_0=1$, $\psi_1=\frac{\omega-\varphi_N}{\theta_N}$ или

$$\psi_n = \varphi_n(E) + \frac{w - \varphi_N(E)}{\theta_N(E)}\,\theta_n(E). \qquad (2.255)$$

Пусть e_j, $j=1,\ldots,N-q-1$, — двукратные корни уравнения $Q^2(E)=1$, т. е.

$$Q^2(E)-1 = C^2 r^2(E)\,R(E), \quad r(E) = \prod_{j=1}^{N-q-1}(E-e_j), \qquad (2.256)$$

$$C^{-1} = c_0 \ldots c_{N-1}.$$

В точках e_j в блоховском базисе матрица оператора $\hat{T}$ равна ± 1. Значит, она равна ± 1 в любом другом базисе. Отсюда

$$\theta_N(E) = r(E)\,\tilde{\theta}_N(E), \quad \varphi_{N+1}(E) = r(E)\,\tilde{\varphi}_{N+1}(E),$$

$$\varphi_N(e_j) = \theta_{N+1}(e_j) = w(e_j) = \pm 1. \qquad (2.257)$$

Из (2.257) следует, что $Q(E) - \varphi_N(E) = r(E)\,\tilde{Q}(E)$.

Здесь $\tilde{\theta}_N$, $\tilde{\varphi}_{N+1}$, $\tilde{Q}$ — полиномы по E. Подставляя в (2.225) $w = Q + Cr\sqrt{R}$ и используя предшествующие равенства, получим

$$\psi_n^{\pm} = \varphi_n(E) + \frac{\tilde{\theta}(E) \pm C\sqrt{R(E)}}{\tilde{\theta}_N(E)}. \qquad (2.258)$$

Это равенство и означает, что двузначная функция $\psi_n^{\pm}$ является однозначной, мероморфной функцией точки Г. Полюса ψ лежат в точках $\gamma_1,\ldots,\gamma_q$, расположенных по одной над корнями полинома $\tilde{\theta}_N(E)$. Действительно, если $\tilde{\theta}_N(E)=0$, то два корня $w_{1,2}$ равны $\varphi_N(E)$ и $\theta_{N+1}(E)$. При этом $\varphi_N(E) \neq \theta_{N+1}(E)$. Следовательно, для одного из корней w (т. е. на одном из листов Г над корнем $\tilde{\theta}_N(E)=0$) числитель дроби в (2.258) обращается в нуль. Полюс ψ_n лежит на втором листе.

Для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть поведение $\psi_n^{\pm}(E)$ при $E \to \infty$. Из (2.258) следует, что в P^+ ψ_1 имеет простой полюс. Непосредственно из (2.244) получим, что ψ_n имеет полюс в P^+ n-ого порядка, $n>0$. Аналогично, ψ_{-n} имеет полюс n-ого порядка в P^-. Из этого и того, что w имеет в P^+ полюс N-ого порядка, а в P^- нуль кратности N, вытекает равенство (2.254), где x_n таковы, что $x_0=0$, $c_n=\exp(x_n - x_{n+1})$.

Параметры γ_i, вернее их проекции на Е-плоскость (которые, как и ранее, мы будем для краткости обозначать также), имеют естественный спектральный смысл.

Лемма 2.2. Набор точек e_j (двукратно вырожденных точек спектра периодической и антипериодической задач для L) и $\{\gamma_i\}$ является спектром задачи (2.244) с нулевыми граничными условиями.

Доказательство. Поверхность Г над точками e_j имеет два листа, на каждом из которых w принимает одинаковое значение 1 или —1.

В качестве $\tilde{\psi}_n$ можно взять

$$\tilde{\psi}_n(e_j)=\psi_n^+(e_j)-\psi_n^-(e_j)=\frac{2C\sqrt{R(e_j)}}{\tilde{\theta}_N(e_j)}\theta_n(e_j). \qquad (2.259)$$

Точки γ_i являются нулями $\theta_N(E)$. Как уже говорилось выше, при $E=\gamma_i$ для одного из знаков перед $\sqrt{R}$ в (2.258) числитель второго слагаемого обращается в нуль. Значит, для второго он отличен от нуля. Пусть это, например, знак плюс. Тогда

$$\tilde{\psi}_n(\gamma_j)=(\tilde{Q}(\gamma_j)+C\sqrt{R(\gamma_j)})\,\theta_n(\gamma_j) \qquad (2.260)$$

есть нетривиальное решение уравнения (2.244), $E=\gamma_j$, с нулевыми граничными условиями.

Рассмотрим обратную задачу. Пусть заданы произвольные различные точки E_i, $i=1,\ldots,2q+2$, и точки $\gamma_1,\ldots,\gamma_q$ на римановой поверхности Г функции $\sqrt{R(E)}$, проекции которых на E-плоскость различны. В разностных задачах аналог теоремы 2.2 есть теорема Римана—Роха [138]. В данном случае она утверждает, что существует единственная с точностью до пропорциональности мероморфная на Г функция $\psi_n(P)$, имеющая полюса в точках $\gamma_1,\ldots,\gamma_q$, полюс n-ого порядка в P^+ и нуль n-ого порядка в точке P^-. Функцию $\psi_n(P)$ можно с точностью до знака нормировать, потребовав, чтобы коэффициенты при $E^{\pm n}$ на верхнем и нижнем листах в бесконечности были взаимно обратными. Зафиксировав произвольным образом знаки, обозначим соответствующие коэффициенты через $e^{\pm x_n}$. При этом ψ_n будет иметь в окрестности бесконечности вид (2.254).

Лемма 2.3. Построенные функции $\psi_n(P)$ удовлетворяют уравнению (2.244), где коэффициенты оператора L равны:

$$c_n=e^{x_n-x_{n+1}}, \quad v_n=\xi_1^+(n)-\xi_1^+(n+1). \qquad (2.261)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\tilde{\psi}_n=L\psi_n(P)-E\psi_n(P)$. Она имеет полюса в точках $\gamma_1,\ldots,\gamma_q$. Из (2.254), 2.261) следует, что $\tilde{\psi}_n$ имеет полюс $(n-1)$ порядка в P^+ и нуль порядка n в точке P^-. По теореме Римана—Роха $\tilde{\psi}_n=0$.

Метод получения явных формул для ψ_n и коэффициентов L полностью аналогичен непрерывному случаю. Как и ранее, зафиксируем на Г канонический набор циклов. Обозначим через idp нормированный абелев дифференциал третьего рода с единственными особенностями в бесконечности

$$idp=\frac{E^q+\sum_{i=0}^{q-1}\alpha_i E^{q-i-1}}{\sqrt{R(E)}}dE=\frac{h(E)\,dE}{\sqrt{R(E)}}. \qquad (2.262)$$

Коэффициенты α_i определяются из условий нормировки

$$\oint_{a_i} dp = 0, \quad i = 1, \ldots, q. \tag{2.263}$$

Лемма 2.4. Функция $\psi_n(P)$ имеет вид

$$\psi_n(P) = r_n \exp\left(in \int_{e_1}^{P} dp\right) \frac{\theta(A(P) + nU + \zeta)}{\theta(A(P) + \zeta)}, \tag{2.264}$$

где $U_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{b_k} dp$, r_n — константа.

В окрестности бесконечно удаленной точки на верхнем листе имеем

$$\exp\left(i \int_{e_1}^{P} dp\right) = Ee^{-I_0}(1 - I_1 E^{-1} + \ldots), \quad P = (E, \sqrt{R}) \in \Gamma.$$

Из (2.254) следует, что $e^{2x_n + 2I_0 n}$ равно отношению значений множителей при экспоненте в (2.264), взятых в образах $A(P^{\pm}) = \pm z_0$. Из (2.264) и того, что согласно билинейным соотношениям Римана $2z_0 = -U$, получим

$$c_n^2 = e^{-2I_0} \frac{\theta((n-1)U + \tilde{\zeta})\,\theta((n+1)U + \tilde{\zeta})}{\theta^2(nU + \zeta)}, \tag{2.265}$$

где $\tilde{\zeta} = \zeta - z_0$.

В окрестности P^+ имеем

$$A(P) = z_0 + VE^{-1} + \ldots,$$

где координаты V_k вектора V определяются равенством

$$\omega_k = (V_k + O(E^{-1}))\, dE^{-1}.$$

Разлагая (2.264) в ряд по E^{-1}, получим из (2.261)

$$v_n = \frac{d}{dt} \ln \frac{\theta((n-1)U + \tilde{\zeta} + Vt)}{\theta(nU + \tilde{\zeta} + Vt)}\bigg|_{t=0} + I_1. \tag{2.266}$$

Теорема 2.13. Формулы (2.265), (2.266) восстанавливают коэффициенты L по параметрам E_i и γ_j.

Важно отметить, что формулы (2.265), (2.266) определяют в общем случае квазипериодические функции c_n и v_n. Для того чтобы c_n и v_n были периодическими, необходимо и достаточно, чтобы для соответствующего дифференциала dp были выполнены условия:

$$U_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{b_k} dp = \frac{m_k}{N}, \quad m_k \text{ — целые.} \tag{2.267}$$

Как следует из определения ψ_n, параметры E_i, γ_j определяют их с точностью до знака.

Изменения знаков при ψ_n приводят к изменению знаков при c_n. Операторы, отличающиеся лишь знаками при c_n, можно не различать, поскольку их собственные функции тривиально переводятся друг в друга.

До сих пор речь шла об операторах L с произвольными комплексными коэффициентами. Пусть теперь c_n и v_n вещественны, тогда вещественными являются все введенные выше полиномы $\theta_n(E)$, $\varphi_n(E)$, $Q(E)$. Кроме того, периодическая и антипериодические задачи для L являются самосопряженными. Значит, имеется N вещественных точек спектра той и другой задачи, т. е. полином Q^2-1 имеет $2N$ вещественных корней. Отсюда в экстремумах полинома $Q(E)$, $\frac{dQ}{dE}=0$, имеет место $|Q(E)|\to 1$. График полинома Q имеет вид:

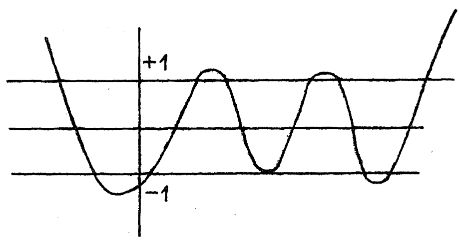

Рис. 2

Отрезки $[E_{2i-1}, E_{2i}]$, в которых $|Q(E)|\leqslant 1$, называются разрешенными зонами. В этих отрезках $|w|=1$ и многозначная функция $p(E)$, определяемая из равенства $w=e^{ipN}$, вещественна. Она называется квазиимпульсом. Ее дифференциал совпадает с (2.262), где в (2.263) a_i — циклы, расположенные над запрещенными зонами $[E_{2i}, E_{2i+1}]$.

Лемма 2.5. Полюса γ_i блоховской функции $\psi_n(P)$ вещественного оператора L расположены по одной в каждой из конечных запрещенных зон, $E_{2i}\leqslant\gamma_i\leqslant E_{2i+1}$.

Доказательство. Полюса γ_i являются нулями полинома $\theta_N(E)$. В этих точках

$$1=\det W=\varphi_N(\gamma_i)\,\theta_{N+1}(\gamma_i).$$

Так как φ_N и θ_{N+1} вещественны, то

$$|Q(\gamma_i)|=\frac{1}{2}|\varphi_N(\gamma_i)+\theta_{N+1}(\gamma_i)|\geqslant 1$$

и γ_i лежит либо в запрещенной зоне, либо в одной из схлопнувшихся зон — точках e_j. В последних $\psi_n(P)$, как было показано выше, не имеет особенностей.

Теорема 2.14. Если точки $E_1,\ldots,E_{2q+2}$ вещественны и точки $\gamma_1,\ldots,\gamma_q$ соответствующей римановой поверхности лежат по одной над каждой из запрещенных зон $[E_{2i}, E_{2i+1}]$, то определяемые ими, в силу теоремы 2.13, коэффициенты v_n и c_n оператора L вещественны.

Доказательство. Необходимость условий теоремы в классе периодических операторов дается леммой 2.5.

Пусть E_i вещественны. Комплексное сопряжение индуцирует антиинволюцию τ кривой Γ, $\tau: P=(E, \sqrt{R}) \rightarrow \tau(P)=(\bar{E}, \sqrt{\overline{R(\bar{E})}})$. Неподвижными овалами этой антиинволюции являются циклы, расположенные над отрезками $[E_{2i}, E_{2i+1}]$ и над бесконечной зоной, соединяющей через бесконечность точки E_{2q+2}, E_1.

Рассмотрим $\overline{\psi_n}(\tau(P))$. Эта функция обладает всеми аналитическими свойствами ψ_n. Поскольку ψ_n этими свойствами определена с точностью до знака, то

$$\overline{\psi_n}(\tau(P))= \pm \psi_n(P). \qquad (2.268($$

Из (2.262) следует, что v_n вещественны, а c_n либо вещественно, либо чисто мнимое (т. е. c_n^2 вещественно).

Докажем, что в предположениях теоремы $c_n \neq 0$, $c_n \neq \infty$. Отрицание этого утверждения эквивалентно тому, что один или несколько нулей $\gamma_i(n)$ функции $\psi_n(P)$ попадает в бесконечность на верхнем или нижнем листе Γ. Из (2.268) следует, что на циклах, расположенных над $[E_{2i}, E_{2i+1}]$, ψ_n либо вещественна, либо чисто мнимая. На каждом цикле имеется один полюс γ_i, поэтому имеется, по крайней мере, и один нуль. Так как всего нулей q, то $\gamma_i(n)$ расположены, как γ_i, по одному над $[E_{2i}, E_{2i+1}]$ и, значит, отделены от бесконечности.

В силу доказанного, знак c_n^2 не меняется при непрерывных деформациях E_i и γ_i, для которых выполнены условия теоремы. Продеформируем их так, чтобы все запрещенные зоны закрылись. При этом легко проверить, что оператор L продеформируется в оператор L_0, у которого $v_n=0$, а $c_n^2=\mathrm{const}>0$. Теорема доказана.

В заключение параграфа рассмотрим условия, выделяющие операторы L, для которых $v_n=0$, т. е.

$$L\psi_n=c_n\psi_{n+1}+c_{n-1}\psi_{n-1}. \qquad (2.269)$$

Теорема 2.15 ([37], гл. 3, § 1). Необходимыми и достаточными условиями того, что оператор L, восстанавливаемый в силу теоремы 2.13 по данным E_i и γ_i, имеет вид (2.269), т. е. $v_n=0$, являются симметрия точек E_i относительно нуля и инвариантность набора $\{\gamma_j\}$ относительно инволюции на Γ

$$(E, \sqrt{R(E)}) \rightarrow (-E, \sqrt{R(E)}), \quad R(E)=\prod_{i=1}^{q+1}(E^2-E_i^2).$$

Необходимость условий следует из того, что если $\psi_n(P)$ — блоховское решение для оператора (2.269), то для $\tilde{\psi}_n(E)=$ $=(-1)^n \psi_n(E)$ имеем

$$L\tilde{\psi}_n = -E\tilde{\psi}_n, \quad \tilde{\psi}_{n+N} = (-1)^N w\tilde{\psi}_n.$$

Достаточность условий доказывается аналогично доказательству теоремы 2.14.

Определим функцию $\psi_n(t, P)$, которая мероморфна на Γ вне $P^\pm$, имеет полюса $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$, а в окрестности $P^\pm$ имеет вид:

$$\psi_n^\pm(t, E) = e^{\pm x_n} E^{\pm n}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s^\pm(n, t) E^{-s}\right) e^{\mp\frac{t}{2}}. \qquad (2.270)$$

Стандартным образом доказывается, что такая функция удовлетворяет линейным уравнениям

$$L\psi_n = E\psi_n, \quad \frac{d}{dt}\psi_n = A\psi_n, \qquad (2.271)$$

где L и A имеют вид (2.20), (2.21). Следовательно, $x_n = x_n(t)$ удовлетворяют уравнениям периодической цепочки Тода.

Аналогично лемме 2.4, можно выписать явную формулу для $\psi_n(t, P)$ и найти явные выражения для $x_n(t)$.

Теорема 2.16. Функции

$$x_n(t) = \ln\frac{\theta(Un + Vt + \zeta)}{\theta(U(n+1) + Vt + \zeta)} + I_1 t - I_0 \qquad (2.272)$$

удовлетворяют уравнениям цепочки Тоды.

(Здесь I_1 — средний импульс, $-I_0$ — среднее расстояние между частицами.)

Параметры тэта-функции, векторы U, V, ζ выражаются в квадратурах через начальные данные $x_n(0)$, $\dot{x}_n(0)$.

В заключение главы приведем на этом примере еще один аспект теории конечнозонного интегрирования — связи их с вариационными принципами для функционалов типа Крускала (M. Kruskal).

Определим функционалы $I_k = I_k\{c_n, v_n\}$ формулой

$$ip(E) = \ln E - \sum_{k=0}^{\infty} I_k E^{-k}, \qquad (2.273)$$

где $p(E)$ — квазиимпульс. Эти функционалы имеют вид

$$I_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} r_k(c_{n+i}, v_{n+i} \,||\, i \,| < k),$$

где локальные плотности r_k — полиномы.

Из (2.250) имеем

$$I_0 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \ln c_n, \quad I_1 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} v_n, \quad I_2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(c_n^2 + \frac{v_n^2}{2}\right)$$

и т. д.

Теорема 2.17. Оператор L является q-зонным тогда и только тогда, когда его коэффициенты являются экстремальными функционала H,

$$H = I_{q+2} + \sum_{k=0}^{q+1} \alpha_k I_k. \tag{2.274}$$

Это утверждение вытекает из формулы

$$i\delta p = \frac{l_0 E^{q+1} + \ldots + l_{q+1}}{\sqrt{R(E)}}, \quad l_i = l_i(\delta c_n, \delta v_n),$$
$$\delta = \sum_n \left(\frac{\partial}{\partial c_n}\delta c_n + \frac{\partial}{\partial v_n}\delta v_n\right). \tag{2.275}$$

Действительно, разлагая (2.275) в окрестности P^+ и сравнивая с коэффициентами (2.273), получим

$$l_0 = -\delta I_0, \quad l_1 = -\delta I_1 + \frac{s_1}{2}\delta I_0, \quad s_1 = \sum_i E_i,$$
$$l_2 = -\delta I_2 + \frac{s_1}{2}\delta I_1 + \left(\frac{s_1^2}{8} - \frac{s_2}{2}\right)\delta I_0, \quad s_2 = \sum_{i<j} E_i E_j,$$
$$l_k = -\delta I_k + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_{ik}\delta I_i. \tag{2.276}$$

Из первых $q+1$ равенств коэффициенты l_k выразятся через δI_k, $k \leqslant q+1$. Приравнивая коэффициент разложения (2.273) и (2.275) при E^{-q-2}, получим, что

$$\delta H = 0, \tag{2.277}$$

где α_k — симметрические полиномы от E_k.

Доказательство формулы (2.274) может быть получено полностью аналогично доказательству его непрерывного варианта [33].

ЛИТЕРАТУРА

1. Основные понятия гамильтонова формализма восходят к работам классиков аналитической механики — Пуассона, Гамильтона, Якоби, Ли. Различные варианты изложения этих классических понятий имеются в целом ряде учебников (см., например, [1], [42]) и обзоров (см. [78]). Бесконечномерные аналоги гамильтонова формализма до недавнего времени рассматривались лишь для лагранжевых полевых систем в связи с нуждами квантовой теории поля (см., например, [9]). Более сложные примеры возникали в гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости (см. [1], добавление 2), а также в теории уравнения Кортевега — де Фриза [46], [113]. Современный формализм скобок Пуассона в применении к бесконечномерным (теоретико-полевым) системам был систематически разработан в [78]. Общее понятие скобки Пуассона гидродинамического типа было введено и изучено в [39].

2. Использование симметрии гамильтоновых систем для построения их интегралов и понижения порядка также восходит к классическим работам

УДК 514.515.16

В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь, **Симплектическая геометрия.** «Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 4 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1985, 7—139

Этот раздел дифференциальной геометрии служит геометрическим фундаментом вариационного исчисления, классической и квантовой механики, геометрической оптики и термодинамики. В статье отражены связи симплектической геометрии с такими разделами математики, как теория групп Ли, дифференциальные уравнения, теория особенностей, топология. Основные понятия сопровождаются примерами и рисунками, важнейшие теоремы — набросками доказательств. Библ. 78, ил. 60

УДК 514.8+517.986

А. А. Кириллов, **Геометрическое квантование.** «Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 4 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1985, 141—178

Излагается схема геометрического квантования, т. е. построения квантового пространства и квантовых операторов, исходя из общего симплектического многообразия. Для линейного симплектического пространства приводятся явные формулы для квантования квадратичных функций. Устанавливается связь с индексом Маслова. Библ. 47.

УДК 512.77+517.912+517.958

Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, **Интегрируемые системы. I.** «Современные пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 4 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1985, 179—284

Обзор представляет собой изложение как классических, так и современных представлений об интегрируемости гамильтоновых систем. Изложение основных понятий и методов сопровождается разбором большого числа примеров. Библ. 141

Заказ 2538