Il mondo nonolonomo

Andrei Agrachev*

1. Il strano termine “vincolo nonolonomo" deriva dalla meccanica; il primo ad introdurlo fu probabilmente Heinrich Rudolf Hertz, famoso fisico tedesco. Inizialmente riguardava le leggi del movimento di meccanismi con ruote, cuscinetti e simili parti rotanti. Oggi, tuttavia, è chiaro che si tratta di un fondamentale modello matematico dello spazio pluridimensionale, che ha un importantissimo valore conoscitivo. Inoltre, secondo il mio parere, questo argomento ha un enorme potenziale divulgativo, che fino a oggi pratticamente non è stato sfruttato. Ed è proprio questo motivo per cui l'ho scelto per la lezione di oggi.

Probabilmente all'inizio bisogna ricordare in poche parole che cos'è lo spazio pluridimensionale. La letteratura scientifico divulgativa e fantascientifica è da sempre piena di speculazioni su questo argomento. Un metodo comune (molto importante anche per matematici professionisti) è l'analogia diretta: per dare un'idea sulla quarta dimensione e altri dimensioni “invisibili" si descrivi la vita di esseri in un mondo bidimensionale per i quali anche la terza dimensione è invisibile; vedi, per esempio, un interessante libro inglese “Flatland" di Ebbott uscito nel ottocento.

Un semplice esempio: restando su un piano è impossibile spostare una figura dalla posizione “$\geqslant$" alla posizione “$\leqslant$" mentre diventa semplicissimo entrando nello spazio tridimensionale. Restando nello spazio tridimensionale è impossibile trasformare la mano sinistra nella mano destra, ma diventa facile farlo in uno spazio a quattro dimensioni. La presenza di oggetti riflessi specularmente in qualche modo ci suggeriscono la presenza della quarta dimensione.

2. Che cos'è, quindi, lo spazio pluridimensionale e, in generale, la dimensione per i matematici? È superfluo dire che per un matematico non esiste un unico spazio assoluto, ma ce ne sono tantissimi.

*SISSA, Trieste & Istituto di Matematica Steklov, Mosca

Si può definire spazio l'insieme dei possibili stati di un qualsiasi sistema: meccanico, biologico, sociale, qualsiasi, se ogni stato viene codificato da una sequenza finita di numeri in modo che i codici cambiano continuamente con la continua variazione di stato. Nella matematica per questa specie di spazii si usa un termine speciale "varietà", e la dimensione della varietà si considera quantità dei numeri necessari per la codificha di ogni stato ("punto" della varietà).

Il nostro abituale, intuitivamente comprensibile spazio tridimensionale euclideo è l'insieme degli stati possibili del classico punto materiale, che viene codificato da tre coordinate.

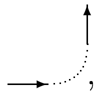
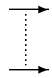
Lo spazio degli stati di questa arancia è, invece, 6-dimensionale: il suo stato è codificato dalle coordinate del centro e altri tre angoli, che ne indicano l'orientamento.

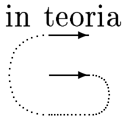
Per poter codificare in modo soddisfacente qualsiasi posizione possibile del corpo umano bisogna avere, ovviamente, moltissimi parametri; tuttavia conviene vedere queste posizione come punti di un certo spazio (varietà) di dimensione molto grande.

In verità, uno stesso stato si può codificare in modi diversi, per esempio cambiando il sistema di coordinate, è questo indica già la debolezza, l'inadeguatezza della nostra definizione di dimensione. Chissà, forse sono possibili codifiche con un numero diverso di parametri, e anche, gli stessi parametri possono avere valore diverso. Vorremmo avere una definizione più naturale, "interna".

3. Torneremo dopo sulla questione della definizione naturale della dimensione, per il momento cerchiamo di arrichire un pò la nostra concezione troppo primitiva dello spazio. In verità, oltre alla descrizione dei diversi stati del sistema, bisogna indicare anche le direzioni in cui questo stato può cambiare. In genere questi direzioni non sono per niente arbitrari e proprio la presenza di direzioni priveligati in cui solamente ci si può muovere, guardare, ottenere e trasmettere informazioni, proprio questo, fa diventare credibili le discussioni su dimensioni virtualmente esistenti, ma invisibili (o quasi invisibili).

Lo chiarisco su un modello semplificato. Questa penna rappresenta una macchina giocattolo con ruote immaginarie, che si muove sul piano. I suoi stati sono codificati da tre parametri (le coordinate del centro e un angolo che ne dà l'orientamento). Tuttavia non possiamo cambiare stato in modo arbitrario: ogni bambino sa che si può muovere la macchina in un

certo modo ma non in un altro. Possiamo imaginare un ipotetico mondo tridimensionale in cui il ruolo dei punti è svolto dagli stati della nostra macchina, ossia, di fatto delle freccette sul piano. Inoltre la luce e, in generale, tutta l'informazione in questo mondo si diffonde solo in direzioni stabiliti. In altre parole il movomento della freccetta dev'essere coordinata col suo orientamento; si può muover cosi: , ma non cosi: .
In questo mondo tridimensionale in teoria tutti gli stati sono raggiungibili:



ma senza guardare troppo lontano (per abitanti miopi o non troppo inventivi) questo mondo sara praticamente piato: una direzione è vietata!

4. Ecco un esempio più che viene spesso chimato effetto del gato in caduta. È noto che, se si prende un gatto per le zampe e lo si lascia cadere, essa atterrerà sempre in zampe. Altri animali meno agili, per esempio i cani, non riescano a fare questo. Potrebbe sembrare che questo fenomeno contradddice le leggi fondamentali della meccanica. In effetti, il momemto della rotazione di qualsiasi corpo in movimento libero è costante. In altre parole se noi stessi non diamo la rotazione al gatto, questo non può girarsi. Dove sta il segreto? Nel fatto che il gato è un oggetto molto flessibile. Se fosse un corpo rigido e non sapesse cambiare la propria configurazione, allora effettivamente non si potrebbe girare.

Lo spiego più in dettaglio. Lo spazio degli stati del nostro "gatto" ha una dimensione abbastanza elevata, poiche bisogna considerare non solo le coordinate del centro e l'orientamento, ma anche la posizione reciproca delle zampe, della testa, della coda, ovvero la sua configurazione. Come nel caso della macchinina, non tutte le direzioni di movimento in questo spazio sono concesse.

Accettiamo che il gato cambia il suo stato autonomamente, senza intervento esterno, quindi, secondo le leggi della meccanica, la somma dei momenti di rotazione di tutte le parti è uguale a zero. Quindi cambiare direttamente l'orientamento è vietato (cosi gli angoli dell'orientamento sono dimensioni quasi invisibili), ma con una combinazione abbastanza complessa di movimenti ammessi si può comunque cambiare orientamento (per esempio, girarsi) e alla fine tutti gli stati diventano raggiungibili!

In verità, incontriamo simili fenomeni non solo in meccanica, ma dappertutto, anche nella vita sociale. Per la meno gli italiani, come anche i russi, sanno bene che attraverso una serie più o meno complessa di passi abbastanza legali, si ottiene spesso un risultato che a prima vista sembra assolutamente illegale, impossibile nei limiti del sistema in funzione. Effetto del gatto in caduta!

5. Insomma, in campi piu diversi incontrano gli spazi di stati, in cui alcune direzioni sono vietate, ma, con un pò di inventiva e pazienza, qualsiasi stato è raggiungibile.

Chissà, forse anche noi viviamo in uno spazio del genere. Per lo meno tutti quanti vengono descritti da un unico schema matematico universale, che adesso cercherò di spiegarlo in modo più o meno visivo. È anche il caso di dire che in matematica i vincoli sulle direzioni di movimento che danno, tuttavia, la possibilita di raggiungere qualsiasi stato, si chiamano nonolonomi, a differenza da vincoli olonomi, che fanno da muro e non lasciano nessuna possibilità. È un pò come la differenza tra società semi-libera e stato totalitario.

Adesso – lo schema generale. Rappresenteremo per chiarezza gli stati con dei punti dello spazio tridimensionale e l'insieme delle direzioni di movimento concesse di un dato stato con un piano legato a questo punto.

In verita, sia l'uno che l'altra possono essere pluridimensionali. Se muoviamo lentamente il punto, il piano legato al punto ruota. È molto importante che ruoti veramente: è proprio questo che alla fine dà la possibilità di raggiungere qualsiasi stato, ovvero fa i vincoli sui movimenti concessi nonolonomi!

Adesso spiegheremo come ci si può muoversi in direzione perpendicolare al piano concesso, anche se questo non è possibile direttamente, e per di più, non solo muoversi, ma controllare questo movimento utilizzando solamente l'informazione ottenuta dalle direzioni concesse.

Immaginiamo un abitante miope (o non lungimirante) di questo mondo nonolonomo. In ogni momento del tempo ha a disposizione solo il piano di direzioni concesse relativo al punto in cui si trova, non vede più niente.

Ecco che questo essere percorre una piccola curva chiusa sul suo piano che vede. In verità non torna nel punto iniziale, ma si sposta leggermente in direzione perpendicolare, poiche il piano reale cambia continuamente durante il movimento. La strada percorsa in direzione perpendicolare è circa proporzionale all'area della parte delimitata dalla curva chiusa percorsa. Oltre all'area è importante la direzione del movimento. Se percorriamo la curva in direzione oraria, ci spostiamo in una direzione (per esempio, verso l'alto), se la percorriamo in direzione antioraria – nel'altra (verso il basso).

Cerco di spiegarlo sull'esempio del nostro spazio di freccette sul piano. Ricordo che lo spazio è tridimensionale e i movimenti concessi devono essere coordinati con la direzione della freccetta. In altre parole, la freccetta si può girare e spostare nella direzione indicata (avanti o indietro), ma non si può spostare lateralmente. In queso modo le due coordinate nel piano delle direzioni concesse sono l'angolo di rotazione e lo spostamento in direzione della freccia. Percorriamo un piccolo rettangolo sul piano delle direzioni concesse, ovvero prima ruotiamo la frecia di un certo angolo, poi spostiamo la frecia in avanti, poi ruotiamo dello stesso identico angolo ma in direzione opposta e, infine, spostiamoci indietro della stessa distanza che avevemo percorso in avanti. Alla fine non torneremo assolutamente nella stessa posizione, ma ci spostiamo un po lateralmente. Non c'è niente di strano in questo; in effetti osserviamo effetti del genere in continuazione, per esempio, parcheggiando l'auto in uno spazio stretto. Forse semplicimente non pensiamo al loro valore universale, trovato grazie alla matematica.

6. Consideriamo un altro modello di dimensione maggiore. Sia questo una sfera che si muove su un piano. Lo spazio degli stati di tale sfera è 5-dimensionale. Infatti la posizione è determinata dal punto di contatto che ha la sfera e il piano (due coordinate) e l'orientamento della sfera (altri tre angoli). Consideriamo che la sfera si può muovere solo senza scivolamenti e giramenti: in questo modo. Cosi il cambio di orientamento è determinato solamente dalla strada che percorre il punto di contatto sul piano. In altre parole in ogni punto del nostro spazio 5-dimensionale è dato un piano bidimensionale delle direzioni di movimento concesse.

Non è troppo difficile mostrare (anche se questo richiede una certa immaginazione spaziale), che le nostri vincoli sul movimento sono nonolonomi, ovvero che da qualunque posizione si può raggiungere un'altra senza scivolamenti e giramenti.

Ovviamente c'è un quantita infinita di modi più o meno complessi di far rotolare la palla in modo che arriva in un determinato punto con l'orientamento voluto. Il problema può ricordare il cubo di rubik, vero? Ma è probabilmente più elegante e naturale. Vorremmo capire la forma delle strade più corte tra tutte le possibili.

Diamo un punto iniziale e uno finale sul piano e un'orientamento iniziale. Ovviamente la strada più corta tra due punti è una retta, ma, percorrendo la

LEONHARD EULER

Figura 1:

retta, otteniamo solo un orientamento speciale, mentre vorremmo imparare ad ottenerli tutti. In questo modo per ogni orientamento ci sarà una sua strada più breve che collega i due punti dati. Come sono queste strade?

Una delle funzioni della matematica è quella di trovare il legame strutturale interno di oggetti diversissimi, apparentemente in nessun modo legati fra loro. Pensate alla coincidenza fra le sezioni coniche e le orbite dei corpi celesti!

Cosi anche nel nostro problema delle strade più corte si sono rivelate le curve notabile, scoperte e studiate già nel settecento dal grande Leonardo Euler (Fig. 1) per un motivo completamente diverso. Sono le cosi dette "elastiche": possibile posizioni del perno elastico con le estremità fissati (vedi Fig. 2 che riproduce una pagina del articolo di Euler). Vale la pena dire che le elastiche sono descritti da funzioni ellittiche, un importante generalizzazione delle semplici funzioni trigonometriche. Le funzioni ellittiche svolgevano nella matematica del ottocento circa lo stesso ruolo che le sezioni coniche nella

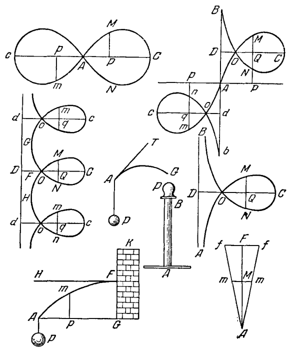


Figura 2:

matematica classica greca e il loro studio, se non ricordo male, è cominciato proprio con il lavoro di Euler.

Il legame tra le elastiche e le funzioni ellittiche è questo: se ci si muove lungo l'elastica, la direzione del movimento (ossia la direzione della retta tangente alla curva) è il seno ellittico della lunghezza della distanza percorsa. Ecco degli esempi della rotolazione lungo due elastiche periodiche.

È interessante vedere come è più conviniente muoversi in direzioni vietate: per esempio, strisciare lungo la curva data quasi senza cambiare orientamento. Ci potrebbe essere un interessante gara fra camerieri: chi per primo sposterà da un lato al altro del vassoio un recipiente pieno con fondo sferico senza toccarlo e senza spargere il contenuto.

Duncue, se vogliamo conservare l'orientamento, il miglior modo è muoversi lungo le elastiche che anno forma vicina a quella del 8. Più sono piccole le dimensioni dell'8, più è preciso l'orientamento, ma più lentamente ci muoviamo, strisciando lungo la curva passante in mezzo agli anelli delle 8.

Perche l'8 e non, per esempio, il cerchio, che è anch'esso un'elastica? Fatto sta che il movimento lungho l'anello piccolo porta alla rotazione della sfera di un angolo proporzionale all'area della parte delimitata dell'anello. Inoltre la direzione della rotazione dipende dal verso in cui percorriamo l'anello: senso orario o antiorario. Proprio i due anelli dell'8 compensano l'angolo della rotazione. In caso contrario il recipiente girerebbe e tutto il contenuto si spanderebbe.

7. Adesso, dopo esserci esercitati con degli esempi, torniamo alle concezioni generali. In verità concezioni utili crescono in genere dal lavoro con gli esempi: in questo senso la matematica non è differente dalle scienze sperimentali. In questo caso i nostri esercizi suggeriscano chiaramente l'unico modo razionale di misurare la distanza in uno spazio nonolonomo: chiamiamo distanza fra due punti la lunghezza della strada più corta permesse che porta da un punto al'altro.

Questo metodo evidente di misurare delle distanze ha un nome alt-sonante "metrica Carnot–Caratheodory", in onore del fondatore della termodinamica Sadi Carnot e del matematico tedesco di origini greche Constantin Caratheodory che ha visto nel lavoro di Carnot un esempio di spazio non olonomo e su questo modello ha, per la prima volta, studiato tale metrica.

Per noi è importante che questa metrica non dipende dal modo di codificare gli stati (ovvero i punti dello spazio nonolonomo) e nello stesso tempo contiene tutta l'informazione interna necessaria sullo spazio, compresa la sua dimensione.

8. Come si può trovare la dimensione sapendo calcolare solo le distanze? In verità questo si può fare in modi diversi. Iniziamo da uno, che non richiede neanche l'individuazione delle distanze ed è accessibile ad un bambino che ha appena iniziato contare e giocare con cubicini.

Iniziamo da oggetti unidimensionali, ossia le curve. ogni curva si può suddividere in segmenti arbitrariamente piccoli, in modo che ad ogni punto aderiscono non più di due segmenti. Ogni figura bidimensionale si può suddividere in aree arbitrariamente piccole in modo che ogni punto si tocca non più di tre aree, in questo modo ci saranno sempre dei punti a cui aderiscono esattamente 3 aree. Ogni volume si può suddividere in oggetti arbitrariamente piccoli in modo che ad ogni punto aderiscono non più di 4 oggetti; se si riempie senza lasciare spazi vuoti, ci saranno sempre dei punti a cui aderiscono 4 oggetti.

E cosi via... . Diremo che la dimensione topologica dello spazio non è piu grande di n, se lo spazio si può suddividere in parti arbitrariamente piccole in modo che ad ogni punto aderiscono non più di $n+1$ parti.

Bisogna dire che la metrica in tale definizione si usa molto debolmente: solamente per sapere cosa significa “arbitrariamente piccolo".

Ecco un'altra definizione di dimensione, molto più metrica, chiamata dimensione di Hausdorf, in onore del matematico che l'ha proposto. Inanzitutto, se sappiamo misurare la distanza, dev'essere chiaro che cose la palla di raggio dato nel nostro spazio metrico: l'unione di tutti i punti che si trovano a distanza minore o uguale del raggio dato da un certo punto – il centro della palla. In questo modo la palla unidimensionale (su una retta) è un segmento, mentre la palla bidimensionale è un cerchio. Delimitiamo adesso una area nel nostro spazio astratto e vedremo quante piccole palline di uguale raggio ci possono entrare. Certamente più piccolo il raggio, più palline ci entrano, a noi interesse, come aumenta il numero delle palline con la diminuzione del raggio.

Nel caso unidimensionale diminuendo il raggio della metà, otterremo circa il doppio di palline, nel bidimensionale 4 volte tante ($4 = 2^2$), nel tridimesionale $8 = 2^3$ e cosi via; l'esponente è proprio la dimensione di Hausdorf o semplicimente dimensione metrica.

Avendo due definizioni di dimensione, entrambi, ricordiamolo, non utilizzano niente a parte la misura delle distanze, possiamo già distinguere uno spazio “olonomo" comune dove tutte le direzioni hanno più o meno lo stesso valore dal nonolonomo. In uno spazio comune entrambi le dimensioni coincidano, mentre nei nonolonomi la dimensione metrica è sempre maggiore di quella topologica.

Per esempio, la dimensione topologica del nostro spazio delle freccette su un piano è uguale a 3, mentre quella di Hausdorf a 4. Invece in uno esempio topologicamente 5-dimensionale di sfere sulla superficie la dimensione di Hausdorf è uguale a 10. Quindi, dal punto di vista della dimensione metrica, una direzione non concesse vale alcuni direzioni concesse (nel nostro caso due o tre). In parole povere per pavimentare una strada lunga 100 metri nella direzione non concessa ci vorra circa la stessa quantità di materiale che per costruire una piazzale 100×100 metri o addirittura un edificio $100 \times 100 \times 100$ metri nelle direzioni concesse.

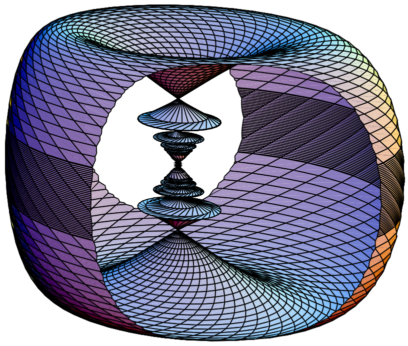


Figura 3:

9. Per finire vorrei mostrare un immagine (vedi Fig. 3) che potrebbe fare da logo della geometria nonolonoma. È il cosi detto fronte d'onda nel più semplice spazio nonolonomo – la posizione momentanea delle particelle partite contemporaneamente dallo stesso punto con la stessa velocità. Le particelle tendono a muoversi per strade più corte e in spazio comune avrebbero riempito la superficie di una sfera. Nel caso nonolonomo solo una parte di queste si ritrova sulla superficie della sfera nonolonoma, tanti, invece, si trovano al interno della sfera e si possono incontrare arbitrariamente vicino al centro.

Perche accade questo? Le particelle scelgono le strade più brevi che portano in *tutti* i punti dello spazio. Quelle che si allontano dal piano delle direzioni concesse sono spirali. Più la spirale è stretta, più è vicina alla direzione perpendicolare al piano concesso. Tuttavia alcuni giri della spirale stretta danno un percorso più lungo rispetto a un giro più largo che porta nello stesso punto.

Le sommità e costole del fronte d'onda sono punti in cui si incontrano piu particelle. Ecco queste sommità sulla superficie della sfera – punti a cui portano non una, ma tante strade più corte. Le particelle che si trovano su questa costola affrontano già un secondo incontro, quelle su la prossima sommità un terzo ecettera. La loro strada non è più la più corta da un pezzo.

Metafora triste: tutte le particelle ci hanno messo lo stesso tempo e tutte si precipitavano con la stessa velocita, ma il loro destino non è uguale per tutti. Alcuni continuano a correre restando insuperati; altri, proprio quelli che hanno shelto le strade più dificili, che hanno già incontrato molte volte dei perdenti come loro, si trascinano in coda.

Su questa imagine il piano delle direzioni concesse nel punto iniziale è orizzontale, quindi arrivano ultimi coloro che al'inizio cercano di arrampicarsi più in alto.