ТОПОЛОГИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ "В ЦЕЛОМ"

I. Пусть M^n, V – гладкие многообразия. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение в M^n, зависящее от параметров, лежащих в V.

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x(0)=x_0, \quad u \in V \tag{I}$$

Если каждой ограниченной функции $\tau \mapsto u(\tau)$, $0 \le \tau \le t$ со значениями в V сопоставить правый конец траектории уравнения $\dot{x} = f(x,u(\tau))$, $x(0)=x_0$, то получится отображение $G_t: u(\cdot) \mapsto x(t)$ пространства $L_\infty([0,t],V)$ в M^n. Функции $u(\tau)$ называют управлениями, семейство отображений G_t, $t \geq 0$, – управляемой системой, а множество $\mathcal{A}_t = \bigcup_{0\le\tau\le t} \operatorname{im} G_\tau$ – множествами достижимости.

Множества $\mathcal{A}_t$ устроены довольно сложно, однако всегда имеется эффективно вычислимое подмногообразие в M^n, содержащее $\mathcal{A}_t$, относительно которого $\mathcal{A}_t$ имеют непустую внутренность, поэтому с самого начала можно считать, что внутренность $\mathcal{A}_t$ не пуста. Основные задачи:

I) Охарактеризовать такие допустимые траектории $x(\tau)$, что $x(t) \in \partial\mathcal{A}_t$, $t>0$ ($x(t)$ всё время лежит на границе множества достижимости).

II) Оценить группы гомологий множеств $\mathcal{U}_t^{x_1} = \{(\tau, u(\cdot)) \mid 0 \le \tau \le t, G_\tau(u(\cdot)) = x_1\}$ управлений, ведущих в заданную точку $x_1 \in M^n$.

В случае, когда множества допустимых скоростей $f(x,V)$ являются гладкими выпуклыми гиперповерхностями в $T_x M^n$, I) – есть основная задача вариационного исчисления в формулировке геометрической оптики, а II) – задача теории Морса. Из теории скользящих режимов Р.В.Гамкрелидзе следует, что множества $f(x,U)$ всегда можно считать выпуклыми, однако размерность этих множеств (число управляющих параметров) в конкретных задачах теории управления обычно намного меньше n. Тот факт, что число управляющих параметров много меньше размерности конфигурационного многообразия, делает предмет гораздо богаче, чем классическое вариационное исчисление. В действительности, очень содержательные и важные для приложений примеры доставляют уже системы вида

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u\ , \quad u \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где все определяют два (разумеется, не коммутирующих) векторных поля: одно векторное поле возмущается с помощью другого, причем амплитуду и знак возмущения можно менять с течением времени. Если M^n – однородное многообразие, а f, g – инвариантные поля, то система (2) называется билинейной. Тесно связанный с (2) класс систем дают также вариационные задачи с "неголомными связями".

Все начинается с выявления критических точек отображений G_t и вычисления гессиана G''_t в этих точках. И сразу нас ожидает сюрприз....

В классической ситуации дифференциал G'_t в критической точке заведомо имеет ранг $n-1$, гессиан $G''_t : \ker G'_t \to$ $\to \operatorname{coker} G'_t$ является скалярной квадратичной формой и, чтобы решить задачу I), достаточно выяснить, знакоопределена эта форма или нет, а научившись вычислять индексы таких форм, при некоторой удаче можно решить и задачу II). Однако эта отлаженная схема отказывает уже в самых простых билинейных системах. Рассмотрим систему (2) в случае, когда M^n – группа Ли, а f, g – левоинвариантные поля. Дифференциал G'_t отображения G_t в нуле (после правого переноса в единицу группы M^k) имеет вид

$$G'_t u(\cdot) = \int_0^t e^{\tau \operatorname{ad} f}_g u(\tau) d\tau .$$

Предположим, что M^k – полупростая группа Ли и H – подалгебра Картана, содержащая f . Тогда

$$\operatorname{im} G'_t = \operatorname{span}\{\operatorname{ad}^i f g,\ i \geq 0\} \subset H^{\perp} + \mathbb{R} g .$$

Таким образом, $\dim \ker G'_t$ никак не меньше, чем ранг группы M^k минус 1, и если ранг группы больше двух, то гессиан $G''_t : \ker G'_t \to \operatorname{coker} G'_t$ – заведомо векторное (не скалярное) квадратичное отображение. Этот гессиан имеет вид

$$G''_t(v(\cdot)) = \int_0^t [\int_0^\tau e^{\theta \operatorname{ad} f}_g v(\theta) d\theta,\ e^{\tau \operatorname{ad} f}_g v(\tau)] d\tau + \operatorname{span}\{\operatorname{ad}^i f g,\ i \geq 0\},$$

$$\int_0^t e^{\tau \operatorname{ad} f^i}_g v(\tau) d\tau = 0 .$$

Исследование таких интегральных отображений можно свести к красивым конечномерным объектам симплектической геометрии, однако пока мы круто развернемся и выясним, что вообще можно делать с квадратичными отображениями, хотя бы и от конечного числа переменных.

2. Пусть $p : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^k$ – квадратичное отображение, так что для каждой строки $\omega \in \mathbb{R}^{k*}$ ωp – вещественная квадратичная форма. Поскольку $p(x) = p(-x)$, то определено отображение $\bar{p} : \mathbb{P}^N \to \mathbb{R}^k$. "Квадратичные" аналоги задач I), II) имеют вид:

I^2) В каких случаях верно равенство $p(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathbb{R}^k$ (т.е. система квадратичных уравнений $p(x) = a$ разрешима $\forall a \in \mathbb{R}^k$)?

П^2) Описать группы гомологий множества $\bar{p}^{-1}(0)$ (т.е. группы гомологий пересечения k вещественных квадрик).

Эти две задачи тесно связаны:

П р е д л о ж е н и е I. При $k^2 \leq N+1$ для типичного p [1)] имеем

$$p(\mathbb{R}^{N+1}) = \mathbb{R}^k \Leftrightarrow \bar{p}^{-1}(0) \neq \emptyset,$$

т.е. наличие нетривиальных решений однородной системы эквивалентно разрешимости неоднородной системы с произвольной правой частью.

Ограничение $k^2 \leq N+1$, видимо, можно ослабить, однако совсем убрать нельзя: не говоря о том, что квадратичные отображения $\bar{p}: \mathbb{P}^{k-1} \to \mathbb{R}^k$ могут иметь ненулевую степень относительно начала в $\mathbb{R}^k$, расслоения Хопфа $S^{2k-3} \to S^{k-1}$, $k = 3, 5, 9$, также релизуются квадратичными отображениями.

Итак, для решения задачи I^2) по крайней мере в стабильных размерностях, достаточно предъявить критерий существования нетривиальных вещественных решений однородной системы квадратичных уравнений. Этот совершенно естественный вопрос интересовал нас давно, т.к. он тесно связан с условиями оптимальности, однако ничего путного на эту тему найти не удалось. Теперь, к счастью, можно отвечать и на более глубокие вопросы.

Мы несколько расширим постановку задачи П^2) и будем вычислять гомологии не только множества $\bar{p}^{-1}(0)$, но также и $\bar{p}^{-1}(K)$, где K – произвольный выпуклый замкнутый

---

1) Здесь: для любого p из некоторого открытого по Зарисскому множества в пространстве квадратичных отображений.

конус в $\mathbb{R}^K$. Иными словами, наряду с системами квадратичных уравнений рассматриваются и системы квадратных неравенств.

Если $K=1$, p – неособая форма, то $\bar{p}^{-1}(\mathbb{R}_-)=\mathbb{P}^{ind\,p}$, $\bar{p}^{-1}(0)$ – двулистное накрытие над $\mathbb{P}^{ind\,p-1}\times\mathbb{P}^{N-ind\,p}$. Для произвольного $K>0$ квадратичное отображение p называется невырожденным относительно конуса K, если $\bar{p}:\mathbb{P}^N\to\mathbb{R}^k$ трансверсально K. Это расшифровывается следующим образом: p вырождено относительно K в том и только том случае, когда существуют такие ненулевые $\omega\in K^0$, $x\in\ker(\omega p)$, что $p(x)\in K$ (здесь $\mathbb{R}^{K*}\supset K^0$ – дуальный конус к K).

В дальнейшем рассматриваются только невырожденные отображения (типичное отображение невырождено). Положим $\Omega=K^0\cap S^{K-1}$ и рассмотрим функцию $\omega\mapsto ind\,\omega p+\dim\ker\omega p$ на Ω, принимающую целые неотрицательные значения. Пусть Ω_n – подмножество в Ω, состоящее из точек, в которых значения этой функции не превосходят n. Получается фильтрация $\Omega_0\subset\Omega_1\subset\ldots$ пространства Ω открытыми подмножествами.

Ниже, если не оговорено противное, группы гомологий и когомологий рассматриваются только с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$. Рассмотрим таблицу

$$\begin{array}{|l}
H^0(\Omega_0),\ H^1(\Omega_0),\ \ldots,\ H^i(\Omega_0),\ \ldots\\
H^0(\Omega_1),\ H^1(\Omega_1),\ \ldots,\ H^i(\Omega_1),\ \ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
H^0(\Omega_N),\ H^1(\Omega_N),\ \ldots\ H^i(\Omega_N),\ \ldots\\
\hline
\end{array} \qquad (3)$$

Оказывается, существует когомологическая спектральная последовательность, сходящаяся к $H^{\cdot}(\mathbb{R}P^N \setminus \tilde{p}^{-1}(K))$, член E_2 которой совпадает с этой таблицей. Более того, высшие дифференциалы этой спектральной последовательности допускают вполне конструктивное описание.

Произвольная скалярная квадратичная форма имеет вид $q(x)=(Qx,x)$, где Q - симметричная $(N+1)\times(N+1)$ -матрица, пусть $\lambda_1(Q)\leq\ldots\leq\lambda_{N+1}(Q)$ - ее собственные значения. В пространстве $\mathcal{M}_N$ всех таких матриц рассмотрим открытые подмножества $\Lambda_n=\{Q\in\mathcal{M}_N \mid \lambda_{n+1}(Q)\neq\lambda_{n+2}(Q)\}$, $n=0,1,\ldots,N-1$. Дополнение $\mathcal{M}_N\setminus\Lambda_n$ является замкнутым псевдомногообразием коразмерности два в $\mathcal{M}_N$, пусть $H^1(\Lambda_n)\ni\gamma_n$ - класс когомологий, значение которого на цикле в Λ_n есть коэффициент зацепления $\bmod 2$ этого цикла с $\mathcal{M}_N\setminus\Lambda_n$. Класс γ_n совпадает также с одномерным классом Штифеля-Уитни векторного расслоения над Λ_n, слоем которого над точкой Q является инвариантное подпространство оператора Q, отвечающее собственным значениям $\lambda_1(Q),\ldots,\lambda_{n+1}(Q)$.

Положим $\Gamma_n=\delta\gamma_n\in H^2(\mathcal{M}_N,\Lambda_n)$, где δ - связывающий гомоморфизм в точной последовательности пары $(\mathcal{M}_N,\Lambda_n)$. Значение класса Γ_n на относительном цикле есть индекс пересечения $\bmod 2$ этого цикла с $\mathcal{M}_N\setminus\Lambda_n$.

Вернемся к квадратичным отображениям $p:\mathbb{R}^{N+1}\to\mathbb{R}^K$. Пусть $\pi:\omega\mapsto\omega p$, $\omega\in\Omega$ - отображение Ω в пространство симметричных матриц $\mathcal{M}_N$, тогда $\pi^*\Gamma_n\in H^2(\Omega,\pi^{-1}(\Lambda_n))$. Оказывается, группы когомологий пространства $\mathbb{R}P^N\setminus\tilde{p}^{-1}(K)$ полностью определяются фильтрацией Ω_n и классами $\pi^*\Gamma_n$.

Заметим, что $\Omega_{n+1}\setminus\Omega_n\subset\pi^{-1}(\Lambda_n)$ и

$$H^i(\Omega_n,\pi^{-1}(\Lambda_n))\approx H^i(\Omega_{n+1},\pi^{-1}(\Lambda_n))$$ (вырезание).

Ниже мы опускаем обозначения однозначно восстанавливаемых из контекста изоморфизмов вырезания и гомоморфизмов групп когомологий, индуцированных вложением одной пары множеств в другую.

Т е о р е м а. Имеется когомологическая спектральная последовательность, сходящаяся к $H^{\cdot}(\mathbb{P}^N \setminus \bar{p}^{-1}(K))$, член E_2 которой совпадает с таблицей (3). Дифференциал $d_2 : H^i(\mathcal{R}_n) \longrightarrow H^{i+2}(\mathcal{R}_{n+1})$ действует так: $d_2\xi = \pi^*(\Gamma_n) \cup \xi$; высшие дифференциалы d_r, $r \geqslant 3$ индуцированы операциями Масси

$$\xi \longmapsto \langle \pi^*(\Gamma_{n+r-1}), \ldots, \pi^*(\Gamma_n), \xi \rangle, \text{ где } \xi \in H^i(\mathcal{R}_n),\ d_j\xi = 0,\ 2 \le j \le r$$

В качестве примера рассмотрим случай $K=3$. Здесь уже член E_2 позволяет почти полностью описать когомологии не только $\mathbb{P}^N \setminus \bar{p}^{-1}(K)$,н/о и $\bar{p}^{-1}(K)$. Мы ограничимся случаем $K=0$, т.е. системой трех квадратных уравнений от $N+1$ переменных , причем не будем формулировать общий результат, а приведем несколько интересных следствий. Заметим, что $\bar{p}^{-1}(0)$ - подмногообразие размерности $N-3$ в $\mathbb{P}^N$; $\det\omega\rho$ - однородная форма степени $N+1$ от $\omega \in \mathbb{R}^3$ и уравнение $\det\omega\rho = 0$ определяет кривую степени $N+1$ в $\mathbb{P}^2$, которую мы обозначим C_ρ . Предположим, что кривая C_ρ неособа (это типичная ситуация), и пусть c_ρ - количество ее компонент связности.

1) Если N нечетно, то $\chi(\bar{p}^{-1}(0)) = 2\chi\{\omega \in \mathbb{P}^2 \mid \det\omega\rho \le 0\}$ (при четном N , конечно, $\chi(\bar{p}^{-1}(0)) = 0$).

2) Пусть $N \geqslant 4$. Если $\bar{p}^{-1}(0) = \emptyset$, то C_ρ состоит из $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ вложенных друг в друга овалов и, если N четно,

еще одной компоненты, не стягиваемой в $\mathbb{P}^2$. Этот класс кривых, кажется, рассматривался в работах Дубровина в связи с ~~интегрированием дифференциальных уравнений~~ конечнозонными операторами. При $N=3$ имеется еще расслоение Хопфа, которому соответствует пустая кривая, а при $N=2$ – отображения $\mathbb{P}^2 \to S^2$ ненулевой степени, которым соответствуют вещественные кубические кривые, состоящие из одной компоненты (отображениям нулевой степени отвечают кривые, состоящие из двух компонент).

3) Пусть $N \geq 4$. Если кривая C_p не содержит гнезда из вложенных друг в друга $[\frac{N-1}{2}]$ овалов, то многообразие $\bar{p}^{-1}(0)$ связно.

4) Положим $m+1 = \min\limits_{\omega \in S^2} \operatorname{ind} \omega p$, и пусть $m+1 < [\frac{N}{2}]$ (заметим, что a'priori $m+1 \leq [\frac{N+1}{2}]$). Оказывается, гомоморфизмы $H_i(\bar{p}^{-1}(0)) \to H_i(\mathbb{P}^N) = \mathbb{Z}_2$, индуцированные вложением $\bar{p}^{-1}(0) \subset \mathbb{P}^N$, – ненулевые при $0 \leq i < m$, и нулевые при $m < i$ (напомним, что рассматриваются только гомологии с коэффициентами из $\mathbb{Z}_2$). Гомоморфизм $H_m(\bar{p}^{-1}(0)) \to H_m(\mathbb{P}^N) = \mathbb{Z}_2$ может быть как нулевым, так и ненулевым. Пусть ε – ранг этого гомоморфизма (ε равно нулю либо единице). Вот, на мой взгляд, наиболее интересное следствие про пересечение трех вещественных квадрик:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-3} \dim_{\mathbb{Z}_2} H_i(p^{-1}(0)) = c_p + 2(m+\varepsilon) - [\frac{N+2}{2}].$$

Теперь объясним, откуда взялась спектральная последовательность. В пространстве $\Omega \times \mathbb{P}^N$ рассмотрим подмножество $B = \{(\omega, x) \mid \omega \bar{p}(x) > 0\}$ Имеем диаграмму

$$\Omega \longleftarrow B \longrightarrow \mathbb{P}^N \setminus \bar{p}^{-1}(0),$$

в которой отображения индуцированы координатными проекциями $\Omega \times \mathbb{P}^N$ на первый и второй сомножители. Легко видеть, что правое отображение - гомотопическая эквивалентность. Наша спектральная последовательность - это последовательность Лере левого отображения. Оказывается, ее можно вычислить до конца!

Совершенно аналогично описывается спектральная последовательность, сходящаяся к группам $H^*(\Omega \times \mathbb{P}^N, B)$, член E_2 этой "относительной" последовательности имеет вид

$$\begin{array}{|l} H^0(\Omega,\Omega_0),\ldots,H^i(\Omega,\Omega_0),\ldots \\ H^0(\Omega,\Omega_1),\ldots,H^i(\Omega,\Omega_1),\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ H^0(\Omega,\Omega_N),\ldots,H^i(\Omega,\Omega_N),\ldots \\ \hline \end{array}$$

а высшие дифференциалы по существу те же. Удобно переиндексировать эту последовательность так, чтобы она стала последовательностью 4-й четверти: $E_2^{i,-j} = H^i(\Omega,\Omega_j)$. Тогда $\bigoplus_{j-i=n} E_\infty^{i,-j} \approx H_n(\bar{p}^{-1}(K))$, но лишь в "стабильных размерностях" $n < \frac{N+1-K^2}{K+1}$. Относительная последовательность особенно удобна при больших N, она вычисляет гомологии не $\mathbb{P}^N \setminus \bar{p}^{-1}(K)$, а непосредственно $p^{-1}(K)$. С другой стороны, эта последовательность учитывает и некоторые нестабильные инварианты, например, отображение гомологий $\bar{p}_* : H_{K-1}(\mathbb{P}^N) \to H_{K-1}(S^{K-1})$, если $\bar{p}^{-1}(0) = \emptyset$.

Часто бывает важно знать гомологии множества $p^{-1}(K) \cap S^N$, которое является прообразом $\bar{p}^{-1}(K)$ при двулистном накрытии $S^N \to \mathbb{P}^N$. Согласно двойственности Александера, всё равно -

вычислять гомологии $p^{-1}(K)\cap S^N$ или когомологии $S^N\setminus p^{-1}(K)$. Для спектральной последовательности, сходящейся к $H^*(S^N\setminus p^{-1}(K))$ член E_2 имеет вид

$$\begin{array}{r|l}
N & H^*(\Omega_0) \\
 & H^*(\Omega_1,\Omega_0) \\
 & \vdots \\
1 & H^*(\Omega_{N-1},\Omega_{N-2}) \\
\hline
0 & \quad *
\end{array}$$

Высшие дифференциалы снова определяются фильтрацией Ω_k и классами $\pi^*(\gamma_k)$, однако операции Масси при этом не участвуют.

Высшие дифференциалы получаются из высших дифференциалов спектральной последовательности самой фильтрации $\Omega_0\subset\Omega_1\subset\ldots\subset\Omega_k\subset\ldots$ (сходящейся к $H^*(\Omega)$) специальным "подмешиванием" классов γ_k. Например,

$d_2: H^i(\Omega_k,\Omega_{k-1})\to H^{i+2}(\Omega_{k+1},\Omega_k)$ имеет вид

$$d_2=\delta_k\circ\overline{\pi^*}\gamma_{k-1}+\pi^*\gamma_k\circ\delta_k,$$

где $\delta_k: H^i(\Omega_k,\Omega_{k-1})\to H^{i+1}(\Omega_{k+1},\Omega_k)$ – связывающий гомоморфизм в точной последовательности тройки, а

$\overline{\pi^*\gamma_k}\,\xi=\pi^*\gamma_k\cup\xi$.

Вся теория имеет эрмитов и кватернионный варианты. Квадратичное отображение $p:\mathbb{C}^{N+1}\to\mathbb{R}^K$ называется эрмитовым, если $p(ix)=p(x)$ (это означает, что $\forall\omega$ скалярная форма ωp является вещественной частью полуторалинейной комплексной формы). Соответственно, среди квадратичных отображений $p:\mathbb{H}^{N+1}\to\mathbb{R}^K$ рассматриваются лишь такие, для которых $p(ix)=p(jx)=p(x)$. В эрмитовом случае $\bar p^{-1}(K)\subset\mathbb{C}P^N$, а в кватернионном

$\bar p^{-1}(K)\subset\mathbb{H}P^N$. В спектральных последовательностях как абсолютной, так и относительной заполнена лишь каждая вторая строчка в эрмитовом случае и каждая четвертая – в кватернионном случае. Например, для эрмитовой абсолютной последовательности член E_2 имеет вид:

$$\begin{array}{|l} H(\Omega_0) \\ 0 \\ H(\Omega_1) \\ 0 \\ \\ H(\Omega_N) \\ \hline \end{array}$$

Классы γ_r двумерны (а в кватернионном случае четырехмерны) и являются классами Чжэня (Понтрягина) соответствующих расслоений. В отличие от вещественного случая рассматриваются группы когомологий с произвольными коэффициентами.

3. Вернемся к упрaвляемой системе, пусть $\rho_t = G''_t$ – квадратичное отображение гильбертова пространства $\ker G'_t$ в $\operatorname{coker} G'_t = \mathbb{R}^K$. Пусть $\mathbb{R}^K \supset K$ – выпуклый замкнутый конус, гомологии множества $\rho^{-1}(K)$ можно искать тем же способом, что и в конечномерной ситуации. Для этого необходимо описать фильтрацию Ω_r и классы $\pi^*\gamma_r$, определяющие наши спектральные последовательности. И тут в дело вступает симплектическая геометрия.

Явные выражения для G'_t и G''_t в общем случае мало чем отличаются от приведенных выше для билинейной системы. В конце концов, произвольную систему вида (2) можно рассматривать как билинейную систему для группы диффеоморфизмов, а совсем произвольную систему (I) все равно приходится дифференцировать по u. Для систем вида (2) после подходящей замены переменных имеем

$$G'_t u = \int_0^t X_\tau u(\tau)\, d\tau \Big|_{x_0}, \quad G''_t(\gamma) = \int_0^t \Big[\int_0^\tau X_\theta \gamma(\theta)\, d\theta, X_\tau \gamma(\tau)\Big] d\tau \Big|_{x_0} + \mathrm{span}\{X_\tau(x_0), 0 \le \tau \le t\}$$

где X_τ – нестационарное поле, явно вычисляемое по f, g и исследуемому управлению.

Пусть $\Pi = \mathrm{span}\{X_\tau(x_0), 0 \le \tau \le t\} = \mathrm{im}\, G'_t$ и $\omega \perp \Pi$. Рассмотрим кососимметричную форму $Y_1, Y_2 \longmapsto \omega[Y_1, Y_2](x_0)$

на пространстве $\mathcal{E}_{\Pi}$ таких полей Y, что $Y(x_0)\in\Pi$. Факторпространство $\mathcal{E}_{\Pi}$ по ядру этой формы есть симплектическое пространство, изоморфное пространству $\Pi\oplus\Pi^*$ со стандартным кососкалярным произведением. В этом пространстве (мы его обозначим Σ, а кососкалярное произведение σ) фиксирована лагранжева плоскость Π_0 – образ при отображении $\mathcal{E}_{\Pi}\to\Sigma$ пространства полей, обращающихся в нуль в точке x_0. Пусть $x_\tau(\omega)\in\Sigma$ – образ поля X_τ (он действительно зависит от ω в отличие от Π_0). В таком случае

$$\omega\beta_t(\gamma)=\int_0^t\sigma\Big(\int_0^\tau x_\theta(\omega)\gamma(\theta)d\theta,\ x_\tau(\omega)\gamma(\tau)\Big)d\tau,\quad \int_0^t x_\tau(\omega)d\tau\in\Pi_0 \qquad (3)$$

Рассмотрим многообразие $L(\Sigma)$ всех лагранжевых плоскостей в Σ – лагранжев грассманиан. Если $\dim\Sigma=2m$, то $\dim L(\Sigma)=\frac{m(m+1)}{2}$ и $L(\Sigma)$ – естественная компактификация пространства квадратичных форм на $\mathbb{R}^m$. В самом деле, множество всех m-мерных подпространств в Σ трансверсальных Π_0, очевидным образом отождествляется с пространством $m\times m$-матриц, среди них лагранжевы плоскости характеризуются тем, что им соответствуют симметричные матрицы.

Пусть $\Pi_0^\pitchfork$ – совокупность всех лагранжевых плоскостей трансверсальных Π_0 и $\Pi_0^\pitchfork\ni\Delta$ – плоскость, отождествленная с началом координат в пространстве симметричных матриц. Тогда множество $\Delta^\pitchfork\cap\Pi_0^\pitchfork$ отождествляется с множеством неособых симметричных матриц, а симплектические преобразования сохраняющие Δ и Π_0, действуют на симметричные матрицы как замены переменных на соответствующие квадратичные формы. Мы видим, что $L(\Sigma)$ есть компактификация пространства квадратичных форм на $\mathbb{R}^m$, при которой "на бесконечности приклеивается конус особых форм". Например, при $m=2$ пространство квадратичных форм трехмерно, конус особых форм - квадрика сигнатуры (1,2), и $L(\Sigma)$ совпадает с конформной компактификацией трехмерного пространства Минковского.

Интересно, что аналогичная компактификация пространства эрмитовых форм на $\mathbb{C}^m$ дает групповое многообразие $U(m)$, а при $m=2$ получается конформная компактификация стандартного четырехмерного пространства Минковского, столь популярная ныне из-за физических приложений.

Обратимся к интегральным квадратичным формам ω (см.(4)). Имеется критерий конечности индекса таких форм. Если индекс формы $\omega\rho_t$ конечен, то кривой $\tau \mapsto \omega\rho_\tau, 0\le\tau\le t$, в пространстве интегральных форм ставится в соответствие кривая $\tau\mapsto\Lambda_\tau(\omega)\in L(\Sigma)$ в $L(\Sigma)$, $\Lambda_0(\omega)=\Pi_0$, - якобиева кривая. Интуитивно $\Lambda_\tau(\omega)$ - элемент компактификации пространства квадратичных форм на $\mathbb{R}^m$ - можно представлять как производную по τ (бесконечно мало приращение) семейства форм $\omega\rho_\tau$, заданных на подпространствах коразмерности в $\le m$ в $L_2[0,\tau]$.

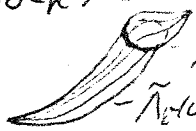
Способ построения кривой $\Lambda_\tau(\omega), 0\le\tau\le t$, обобщает решение классического уравнения Якоби для регулярных вариационных задач. Поэтому она и называется якобиевой кривой. Интересно, однако, что в сильно вырожденных ситуациях нет однозначно определенного уравнения Якоби, но все варианты приводят к одной и той же кривой в $L(\Sigma)$.

"Бесконечно удаленная гиперповерхность" $L(\Sigma)\setminus\Pi_0^{\uparrow}$ является псевдомногообразием коразмерности I в $L(\Sigma)$, она нормально ориентируема (ориентация индуцирована частичным порядком в пространстве квадратичных форм). Индекс пересечения произвольной кривой в $L(\Sigma)$ с этой гиперповерхностью называется индексом Маслова кривой, при этом, как и в классической ситуации, индекс Маслова якобиевой кривой $\Lambda_\tau(\omega)$ совпадает с $ind\,\omega\,p_\tau$. Имеется несколько красивых и эффективных способов вычисления индекса Маслова, поэтому, коль скоро кривые $\Lambda_\tau(\omega)$ построены, проблем с описанием фильтрации $\mathcal{R}_n$ нет.

Мы видим, что целочисленной функции ind на пространстве квадратичных форм отвечает одномерный коцикл в $L(\Sigma)$, двойственный (по Пуанкаре) циклу $L(\Sigma)\setminus\Pi_0^{\uparrow}$. Осталось найти аналоги одномерных классов когомологий γ_r, можно догадаться, что ими должны быть некоторые двумерные классы когомологий, как-то определяемые парой $L(\Sigma), \Pi_0$. Подмножество $G=\{\Lambda\in L(\Sigma) \mid \dim(\Lambda\cap\Pi_0)\geq 2\}\subset L(\Sigma)\setminus\Pi_0^{\uparrow}$ является псевдомногообразием коразмерности 3 в $L(\Sigma)$, оно определяет негомологичный нулю $\mathbb{Z}_2$-цикл в $L(\Sigma)$: класс когомологий двойственного (по Пуанкаре) коцикла совпадает с $w_1\cup w_2+w_3$, где w_i – классы Штифеля – Уитни тавтологического расслоения над $L(\Sigma)$.

Фундаментальная группа многообразия $L(\Sigma)$ – бесконечная циклическая, универсальную накрывающую $\widetilde{L(\Sigma)}$ можно явно описать, взяв счетное число экземпляров $L(\Sigma)$ и определенным образом склеив их вдоль $L(\Sigma)\setminus\Pi_0^{\uparrow}$. Очень изящно способ склейки (т.е. подходящую топологию в множестве $L(\Sigma)\times\mathbb{Z}$) можно описать с помощью так называемого индекса Маслова тройки лагранжевых плоскостей. Подробно это сделано в книге: Лион, Вернь, "Представления Вейля, индекс Маслова и тэта-ряды". Прообраз цикла G в $\widetilde{L(\Sigma)}$ распадается в сумму бесконечного числа циклов $\widetilde{G}_n$ так, что $\widetilde{G}_n$ не пересекается с листами, имеющими номера $> n+1$. Циклы $\widetilde{G}_n$ гомологичны нулю в $\widetilde{L(\Sigma)}$, поэтому определены двойственные к ним по Александеру – Понтрягину двумерные классы когомологий $\tilde{g}_n$ в $\widetilde{L(\Sigma)}\setminus\widetilde{G}_n$: значение класса $\tilde{g}_n$ на произвольном цикле в $\widetilde{L(\Sigma)}\setminus\widetilde{G}_n$ есть коэффициент зацепления $\mathrm{mod}\,2$ этого цикла $\widetilde{G}_n$. Классы $\tilde{g}_n$ и являются искомыми аналогами классов γ_n.

Пусть $\widetilde{\Lambda}_\tau(\omega) = (\Lambda_\tau(\omega), \mu_\tau(\omega)) \in \widetilde{L}(\Sigma)$ – поднятие кривой $\Lambda_\tau(\omega)$ на универсальную накрывающую $\widetilde{L}(\Sigma)$. Нетрудно показать, что $\mu_\tau(\omega)$ монотонно возрастает и, по-существу совпадает с $\operatorname{ind} \omega P_\tau$ (во всяком случае, при $\Lambda_\tau(\omega) \in \Pi_0^+$. Напомним, что $P_t: \omega \mapsto \omega P_t,\ \omega \in \Omega$. Значение класса $\pi^* \gamma_n$ на одномерном цикле C в (Ω_{n+1}, Ω_n) равно значению класса $\tilde{g}_n$ на цикле



$\widetilde{\Lambda}_t(\omega)$

$\widetilde{\Lambda}_t(\omega),\ \omega \in C$ в $\widetilde{L(\Sigma)} \setminus \tilde{g}_n$,

где "крышка"  произвольна, лишь бы она была расположена на листах с номерами $\geq n+1$

4. В пп.2.3. рассказано, как вычислять группы (ко)гомологий множеств $P_t^{-1}(K)$, где $P_t = G_t''$ – гессиан отображения G_t в критической точке. Для того, чтобы оценить группы гомологий множеств $\mathcal{U}_t(x_1)$ (задача П), остается приспособить к рассматриваемой ситуации теорию Морса.

Пусть $\varphi_t: W \to M$, $t \in \mathbb{R}$ – гладкое семейство гладких отображений, $a \in M$, причем множества $\varphi_t^{-1}(a)$ компактны.

Положим $V_t = \{(\tau, w) \mid \tau \le t,\ \varphi_\tau(w) = a\}$. Если

a – регулярное значение отображения φ_t, то V_t гомотопически эквивалентно $V_{t-\varepsilon}$ при малых $\varepsilon>0$. Если же a – критическое значение, то это не так.

Пару (t,u) назовем невырожденной критической точкой, если $\dot{f}_t(u)\notin \operatorname{im} f_t'(u)$ („·" обозначает производную по t, а „′" – производную по u), а гессиан $f_t''(u;\ker f_t'(u)\to$ $\to \operatorname{coker} f_t'(u))$ – квадратичное отображение, невырожденное относительно луча $\ell=\mathbb{R}_+\dot{f}_t(u)+\operatorname{im} f_t'(u)$ в $\operatorname{coker} f_t'(u)$.

П р е д л о ж е н и е. Предположим, что при данном t отображение φ_t принимает значение a только в невырожденных критических точках, и пусть (t,u_α), $\alpha=1,\dots,N$, – все такие точки, $\ell_\alpha\subset \operatorname{coker} G_t'(u_\alpha)$ – соответствующие лучи, S_α – единичная сфера в $T_{u_\alpha}W$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon>0$ пространство $V_{t+\varepsilon}$ гомотопически эквивалентно пространству V_t и

$$H_i(V_t,V_{t-\varepsilon})\approx\bigoplus_{\alpha=1}^{N}\tilde{H}_{i-1}\big(f_t''(u_\alpha)(\ell_\alpha)\cap S_\alpha\big),\quad i>0$$

Все это применимо и к управляемым системам, несмотря на то, что W бесконечномерно.