

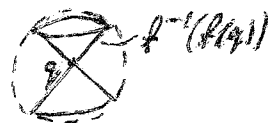
## О КОГОМОЛОГИЯХ КВАДРАТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Пусть  $M^n$  - гладкое многообразие и  $f: M^n \rightarrow \mathbb{R}$  - гладкая функция. При исследовании функции  $f$  на экстремум важную роль играют квадратичные формы - гессианы функции  $f$  в критических точках. Типичная гладкая функция  $f$  является функцией Морса, т.е. какова бы ни была точка  $q \in M^n$ , из условия  $f'(q) = 0$  следует, что  $f''(q)$  - невырожденная квадратичная форма. Если форма  $f''(q)$  (гессиан функции  $f$  в критической точке  $q$ ) невырождена, то, согласно лемме Морса, эта форма полностью определяет поведение функции  $f$  вблизи  $q$ . В частности, точка  $q$  является локально экстремальной для  $f$  тогда и только тогда, когда форма  $f''(q)$  знакоопределена; в этом случае  $q$  - изолированная точка множества уровня  $f^{-1}(f(q))$ . Более общим образом, если невырожденная форма  $f''(q)$  имеет индекс инерции  $k$ , то пересечение множества уровня  $f^{-1}(f(q))$  с  $(n-1)$ -мерной сферой, ограничивающей малую окрестность точки  $q$  в  $M^n$ , диффеоморфно  $S^{k-1} \times S^{n-k-1}$ .

Предположим теперь, что гладкая функция  $f_0$  исследуется на условный экстремум при ограничениях  $f_i(q) = c_i, i=1, \dots, m$ . Рассмотрим отображение

$$F = (f_0, f_1, \dots, f_m)^T: M^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$$

естественным геометрическим аналогом свойства точки  $f_0(q)$  быть условным экстремумом является свойство точки  $F(q)$  лежать на границе множества  $\text{im } F$ . Кандидатами на условный экстремум являются критические точки отображения  $F$ , т.е. такие  $q \in M^n$ , что  $\sum_{i=1}^m \lambda_i f_i'(q) = 0$  для некоторых  $\lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \neq 0$ .



Если  $q$  - критическая точка отображения  $F$ ,  $\text{rank } F'(q) \leq m$ , то корректно определен гессиан  $F''(q)$  - квадратичное отображение из  $\ker F'(q)$  в  $\text{coker } F'(q)$ . В случае, когда  $\text{rank } F'(q) = m$  (например, если  $f'_1(q), \dots, f'_m(q)$  линейно независимы), гессиан является скалярной квадратичной формой. Если же  $\text{rank } F'(q) < m$ , то гессиан - векторное квадратичное отображение или, иначе, линейная система квадратичных форм.

Произвольное квадратичное отображение  $p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  назовем вырожденным, если начало в  $\mathbb{R}^k$  является критическим значением отображения  $p|_{S^{N-1}}$ .

Пусть  $\omega \in \mathbb{R}^{k \times k}$ , тогда  $\omega p$  - квадратичная форма на  $\mathbb{R}^N$ , обозначим через  $\omega p$  соответствующую симметричную  $N \times N$  -матрицу. Отображение  $p$  вырождено в том и только том случае, когда для некоторых  $\omega \in \mathbb{R}^{k \times k} \setminus 0, \chi \in S^{N-1}$  выполняются равенства  $\omega p \chi = 0, p(\chi, \chi) = 0$ . Отсюда нетрудно заключить, что вырожденные отображения образуют собственное алгебраическое подмножество в пространстве всех квадратичных отображений.

Если гессиан  $F''(q)$  - невырожденное квадратичное отображение, то он определяет как локальную экстремальность точки  $F(q)$ , так и топологию пересечения множества уровня  $F^{-1}(F(q))$  с малой окрестностью точки  $q$  в  $M^k$ . Более точно, существует гомеоморфизм малой окрестности  $O_q$  точки  $q$  на  $\mathbb{R}^n$ , отображающий  $F^{-1}(F(q)) \cap O_q$  на  $(F''(q))^{-1}(0)$ .

Если образ пространства  $\ker F'(q)$  при квадратичном отображении  $F''(q)$  не совпадает с  $\text{coker } F'(q)$ , то точка  $F(q)$  лежит на границе множества  $F(O_q)$ ; если же отображение

$F'(q): \ker F'(q) \rightarrow \operatorname{coker} F'(q)$  "существенно покрывает" пространство  $\operatorname{coker} F'(q)$ , то точка  $F(q)$  лежит внутри  $F(O_q)$ .

Пусть  $p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  - невырожденное квадратичное отображение. Ясно, что при  $p^{-1}(0) \neq \emptyset$  отображение  $p$  "существенно покрывает" пространство  $\mathbb{R}^k$ . В случае  $k=1$  верно и обратное, из условия  $p(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}$  следует, что  $p^{-1}(0) \neq \emptyset$ . При  $k > 1$  это уже не так, простейший контрпример дает отображение  $z \mapsto z^2$  из  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{C}$ .

Более интересный пример - отображение  $(z_1, z_2) \mapsto (z_1 \bar{z}_2, |z_2|^2 - |z_1|^2)$  из  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$  в  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ .

Последнее отображение реализует расслоение Хопфа  $S^3 \xrightarrow{(S^1)} S^2$ . Оказывается, однако, что при  $N$  много больше, чем  $k$ , таких примеров не существует.

**Предложение.** Пусть  $p_0: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  - квадратичное отображение, причем для любого  $p$ , близкого к  $p_0$ , выполняется равенство  $p(\mathbb{R}^N) = \mathbb{R}^k$ . Тогда, если  $N > k^2 + \frac{\sqrt{1+8(k-1)}-3}{2}$ , то  $p^{-1}(0) \neq \emptyset$ .

"существенно покрывает" . В случае

Возвращаясь к отображению  $F$ , получаем, что если  $n$  намного больше, чем  $m$ , а  $F''(q)$  невырождено, то  $F(q)$  тогда и только тогда лежит на границе образа малой окрестности точки  $q$ , когда  $q$  - изолированная точка множества уровня  $F^{-1}(F(q))$ .

Итак, при невырожденном гессиане и в стабильных размерностях вопрос о локальной экстремальности есть частный случай вопроса о топологии окрестности особой точки на множестве уровня. В свою очередь, эта окрестность гомеоморфна прообразу нуля гессиана, т.е. пересечению нескольких вещественных квадратик. Вещественность здесь очень важна, напомним, что основной, интересующий нас вопрос - равно это пересечение квадратик нулю или нет.

Конечно, системы квадратных уравнений могут встретиться где угодно, а не только при оптимизации; вопрос в том, в каких терминах искать условия разрешимости.

Напомним, что при  $k=1$  все решает одно целое неотрицательное число - индекс квадратичной формы  $p$ . Пусть теперь  $k > 0$  произвольно и  $p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  - квадратичное отображение. Умножив  $p$  на произвольную строку  $w \in \mathbb{R}^{k*}$ , получим скалярную квадратичную форму  $w p$  (при этом  $\text{ind } w p$ , вообще говоря, зависит от  $w$ ). Обозначим через  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  пространство всех скалярных квадратичных форм на  $\mathbb{R}^N$ , соответствие  $w \mapsto w p$ , где  $w \in S^{k-1} \subset \mathbb{R}^{k*}$  определяет отображение  $p^*: S^{k-1} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ . Каждому  $w \in S^{k-1}$  при этом соответствует целое число  $\text{ind } w p$ , и получается разбиение сферы  $S^{k-1}$  на области  $\{w \mid \text{ind } w p = \text{const}\}$ .

Параметры  $\omega$  возникают очень естественно в экстремальных задачах, это то, что называют множителями Лагранжа, или сопряженными переменными, или обобщенными импульсами, и мы хотим судить о  $P^{-1}(0)$  именно по разбиению  $S^{k-1}$  на области, отвечающие разным индексам скалярных форм  $\omega p$ .

Наряду с системами квадратных уравнений, мы будем рассматривать также системы квадратных неравенств. Предположим, что в  $\mathbb{R}^k$  задан выпуклый замкнутый конус  $\underline{K}$ . Квадратичное отображение  $p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  назовем невырожденным относительно  $\underline{K}$ , если  $p|_{S^{N-1}}$  трансверсально  $\underline{K}$  (т.е.  $\forall x \in S^{N-1}$  из условий  $p(x, x) \in \underline{K}$ ,  $\omega p x = 0$  следует, что  $\omega \notin \underline{K}^\circ \setminus 0$ , где  $\mathbb{R}^{k*} \supset \underline{K}^\circ$  - поляра конуса  $\underline{K}$ ). В случае  $\underline{K} = 0$  мы получаем условие невырожденности квадратичного отображения, приведенное выше.

Если  $p$  невырождено относительно  $\underline{K}$ , то  $p^{-1}(\underline{K}) \cap S^{N-1}$  - многообразие с краем (край, вообще говоря, негладкий), либо пустое множество. Как и в случае  $\underline{K} = 0$ , нас в первую очередь интересует вопрос, пусто  $p^{-1}(\underline{K}) \cap S^{N-1}$  или нет, а если непусто, то топология этого многообразия с краем.

Положим  $\Omega = \underline{K}^\circ \cap S^{k-1} \subset \mathbb{R}^{k*}$ , и пусть  $p^\Omega = p^*|_{\Omega}: \Omega \rightarrow \bar{P}(\mathbb{R}^N)$  - сужение линейной системы квадратичных форм  $p^*$  на  $\Omega$ . На  $\Omega$  определена целочисленная функция  $\omega \mapsto \text{ind } \omega p$ , мы хотим судить о  $p^{-1}(\underline{K}) \cap S^{N-1}$  по этой функции. При этом вместо отображения  $p|_{S^{N-1}}$  удобнее рассматривать индуцированное им отображение  $\bar{p}: P^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , где  $P^{N-1} = \{(x, -x) \mid x \in S^{N-1}\}$  и  $\bar{p}(\{x, -x\}) = p(x, x) = p(-x, -x)$ . Таким образом,  $\bar{p}^{-1}(\underline{K}) \subset P^{N-1}$  и множество  $p^{-1}(\underline{K}) \cap S^{N-1}$

является двулиственным накрытием над  $\bar{P}^{-1}(K)$ .

Наш подход к исследованию отображения  $\bar{P}$  и соответствующей линейной системы  $P^*: S^{k-1} \rightarrow P(\mathbb{R}^N)$  основан на том, что даже, если заранее никакого конуса  $K \subset \mathbb{R}^k$  не задано, все равно, сначала нужно рассмотреть сужения  $P^*$  на узкие конусы в  $\mathbb{R}^{k*}$  (пересеченные с  $S^{k-1}$ ) - эти сужения устроены очень просто, а затем склеить всю картину.

Для начала вычислим эйлерову характеристику множества  $\bar{P}^{-1}(K)$ . Напомним, что  $\Omega = K^\circ \cap S^{k-1}$  и положим

$$\Omega_n = \{\omega \in \Omega \mid \text{ind } \omega \leq n\}, \quad n = 0, \dots, N$$

Заметим, что  $K = K^{\circ\circ} = \Omega^\circ$ , следовательно,

$$\bar{P}^{-1}(K) = \bar{P}^{-1}(\Omega^\circ) = \{x \in P^{N-1} \mid \omega \bar{P}(x) \leq 0, \forall \omega \in \Omega\}$$

**Т е о р е м а.** Предположим, что квадратичное отображение  $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  невырождено относительно выпуклого замкнутого конуса  $K = \Omega^\circ$ , тогда

$$\chi(\bar{P}^{-1}(\Omega^\circ)) = \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \chi(\Omega_{2n+1}, \Omega_{2n}) + \nu \chi(P^{N-1}), \quad (I)$$

где  $\nu = \begin{cases} (-1)^{m-1}, & K = \mathbb{R}^m; \\ 0, & K \neq -K. \end{cases}$

Отметим, что в левой части этого равенства стоит эйлерова характеристика  $(N-k-1)$ -мерного многообразия с краем (вообще говоря, негладким), а в правой части - эйлеровы характеристики  $(k-1)$ -мерных комплексов.

Аналогичное тождество имеет место и для эрмитовых форм. Эрмитовыми мы называем вещественные квадратичные формы на  $\mathbb{C}^N$ , инвариантные относительно умножения на мнимую единицу,  $q(ix, ix) = q(x, x)$  (это вещественные части полуторалинейных комплексных форм). Пространство всех

эрмитовых форм на  $\mathbb{C}^N$  обозначим через  $\mathcal{P}(\mathbb{C}^N)$ .

Пусть  $q: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  - эрмитово отображение,

т.е.  $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^N)^k$ , и  $\bar{q}: \mathbb{C}P^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$  - индуцированное отображение комплексного проективного пространства в  $\mathbb{R}^k$  (где  $\mathbb{C}P^{N-1} = \{ \{e^{i\theta} \chi, \theta \in [0, 2\pi) \} \mid \chi \in S^{2N-1} \subset \mathbb{C}^N \}$ ).

Тогда, если  $q$  - невырожденное квадратичное отображение относительно конуса  $K = \mathcal{R}^0$ , то

$$\chi(\bar{q}^{-1}(\mathcal{R}^0)) = \sum_{n=0}^N \chi(\mathcal{R}_n, \mathcal{R}_{2n}) + \nu N. \quad (2)$$

Доказываются оба тождества следующим образом,

1) Если  $\mathcal{R} = \{\omega_0\}$  - одна точка, то мы имеем дело со скалярными формами  $\omega_0 p$  и  $\omega_0 q$ , и тождества (1), (2) очевидны: в первом из этих тождеств в правой части стоит индекс формы  $\omega_0 p$  по модулю 2, а во втором -  $\frac{1}{2} \text{ind} \omega_0 q$ .

2) Если заменить конус  $K^0$  достаточно малой конической окрестностью фиксированной точки  $\omega_0 \in K^0$ , то, используя подходящие деформации, не меняющие ни левую, ни правую части наших тождеств, можно свести ситуацию к случаю 1). Это наиболее техническая часть доказательства.

3) Пусть  $K, L$  - выпуклые замкнутые конусы, причем  $K \cup L$  выпукло. Если наши тождества верны для конусов  $K^0, L^0, K \cap L^0$ , то они верны и для  $K \cup L^0$ .

В самом деле, эйлерова характеристика аддитивна:

$$\chi(A \cup B) + \chi(A \cap B) = \chi(A) + \chi(B), \quad \text{а при}$$

переходе к полярам объединение переставляется с пересечением:

$$(K \cup L)^0 = K^0 \cap L^0, \quad (K \cap L)^0 = K^0 \cup L^0.$$

4) Конус  $K$  произвольный. Разрезая многократно конус  $K^0$  гиперплоскостями, используя индукцию по размерности  $K^0$  и утверждение 3), все сводим к утверждению 2).

**З а м е ч а н и е.** Объясним, как возникает слагаемое с коэффициентом  $\nu$ . Если конус  $K^0$  не является линейным пространством, то при разрезании пересечения двух половинок всякий раз будет ненулевым, в конце концов все сведется к полупрямым и следует положить  $\nu=0$ . При разрезании линейного пространства мы однажды встретимся с необходимостью разрезать прямую на две полупрямые. Пересечение двух полупрямых есть нулевой конус  $0 = (\mathbb{R}^k)^0$ . Поскольку

$$\bar{p}^{-1}(\mathbb{R}^k) = \mathbb{P}^{N-1}, \quad \bar{q}^{-1}(\mathbb{R}^k) = \mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}, \quad \text{в правой}$$

части наших тождеств возникает в качестве слагаемых (с подходящим знаком) величины  $\chi(\mathbb{P}^{N-1}) = \frac{1}{2}(1+(-1)^{N-1})$

$$\text{и } \chi(\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}) = N \quad \blacktriangleright$$

Рассмотрим подробнее, что дает тождество (I) для пучков и связок квадратичных форм, т.е. при  $K=0$ ,  $k=2, 3$ .

Пусть  $f \in GL(\mathbb{R}^k)$  - некоторое линейное преобразование, меняющее ориентацию. Скажем, что невырожденные квадратичные отображения  $p_i: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $i=1, 2$  гомотопны, если  $p_1$  можно непрерывно продеформировать в  $p_2$  или в  $f \circ p_2$  в классе невырожденных квадратичных отображений. Нетрудно, <sup>показать</sup> что, если  $p_1$  и  $p_2$  гомотопны, то существует изотопия многообразия  $\mathbb{P}^{N-1}$ , переводящая  $\bar{p}_1^{-1}(0)$  на  $\bar{p}_2^{-1}(0)$ .

В случае  $k=2$  легко дать полную классификацию пучков относительно гомотопии. Рассмотрим уравнение  $\det(\omega p) = 0$ ,  $\omega \in S^1 \subset \mathbb{R}^{2*}$ . Пусть  $\pm \hat{\omega}$  - пара корней этого уравнения. Один из корней  $\pm \hat{\omega}$  будем называть положитель-



ным, а другой отрицательным, в соответствии со следующим правилом: пусть  $\kappa \in \ker \hat{\omega} \setminus \{0\}$ , тогда  $\rho(\kappa, \kappa) \perp \hat{\omega}$ .

Пусть  $y \in \mathbb{R}^2$  - произвольный такой вектор, что пара  $(\rho(\kappa, \kappa), y)$  образует положительно ориентированный базис в  $\mathbb{R}^2$ , корень  $\hat{\omega}$  назовем положительным, если  $\hat{\omega} y > 0$ , и отрицательным, если  $\hat{\omega} y < 0$ . Итак, на окружности  $S^1$  фиксировано четное число точек - корней уравнения  $\det(\omega \rho) = 0$ , половина из них положительные, а половина - отрицательные.

Разобьем все положительные корни на группы следующим образом: пара положительных корней попадает в одну группу, если на одной из двух соединяющих эти корни дуг нет отрицательных корней. Нетрудно видеть, что, если имеется хотя бы один корень, то получится нечетное число групп, скажем,  $2m+1$ . Это разбиение на группы дает удобный способ кодирования пучков: рассмотрим правильный  $(2m+1)$ -угольник с каждой вершине  $i$  припишем вес  $n_i$  - число элементов в  $i$ -й группе положительных корней, если и группы, и вершины нумеровать последовательно, двигаясь вдоль окружности в одном и том же направлении. Отметим также центр многоугольника и припишем ему вес  $(N - \sum_{i=1}^{2m+1} n_i) = n_0$  - число невещественных корней уравнения  $\det \omega \rho = 0$ , это число всегда четное. Например, при  $m=1$  получаем код



Два пучка гомотопны в том и только том случае, когда их коды получаются один из другого вращением многоугольника вокруг центра или отражениями относительно прямых, проходящих через центр (соответствующие последовательности  $n_i$  получаются

$(i \rightarrow 2m+1-i)$

одна из другой циклическими подстановками и инверсиями).

Объясним теперь, как подсчитать эйлерову характеристику многообразия  $\bar{P}^{-1}(0)$ , по коду пучка  $P^*$ . На правильном  $(2m+1)$ -угольнике отметим вершины с нечетными весами, пусть  $I$  - множество таких вершин. Для всякого  $\alpha \in I$  обозначим через  $\theta(\alpha)$  число отмеченных вершин, лежащих на замкнутой полуокружности, начинающейся в точке  $\alpha$ , если двигаться в положительном направлении (можно взять и отрицательное направление, важно, чтобы для всех вершин направление было одинаковым).

Пусть, наконец,  $n_0 = N - \sum_{i=1}^{2m+1} n_i$  - вес, приписанный центру  $(2m+1)$ -угольника. Тогда

$$\chi(\bar{P}^{-1}(0)) = (-1)^{\frac{N_0}{2}} \sum_{\alpha \in I} (-1)^{\theta(\alpha)} + \chi(P^{N-1}).$$

Если  $N$  четно, то  $\bar{P}^{-1}(0)$  - нечетномерное многообразие и, естественно,  $\chi(\bar{P}^{-1}(0)) = 0$ , если  $N$  нечетно, то максимальная по абсолютной величине эйлерова характеристика соответствует коду  $\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ \circ & & \\ 1 & \dots & 1 \end{matrix}$  и равна  $N(-1)^{\frac{N+1}{2}} + 1$

Рассмотрим теперь квадратичное отображение  $P: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^3$  и соответствующую связку квадратичных форм  $P^*: S^2 \rightarrow P(\mathbb{R}^N)$

Уравнение  $\det(\omega p) = 0$  определяет вещественную кривую степени  $N$  в  $\mathbb{P}^2 = \{[\omega, \lambda] \mid \omega \in \mathbb{R}^{3*} \setminus 0\}$ .

Предположим, что это неособая кривая; если  $N$  нечетно, то  $\bar{P}^{-1}(0)$  - нечетномерное многообразие, и  $\chi(\bar{P}^{-1}(0)) = 0$ , при четном  $N$  тождество (I) легко преобразуется к виду

$$\chi(\bar{P}^{-1}(0)) = 2\chi\{\bar{\omega} \in \mathbb{P}^2 \mid \det(\omega p) \leq 0\}.$$

Из известных неравенств Петровского теперь следует, что

$$|\chi(\bar{P}^{-1}(0))| \leq \frac{3}{4}N(N-2) + 2.$$

**З а м е ч а н и е.** Неравенство Петровского для кривых четной степени является точным. Кроме того, известно, что ~~любая~~ любая плоская алгебраическая кривая может быть задана уравнением вида  $\det(\omega p) = 0$ , где квадратичные формы  $\omega p$  имеют, вообще говоря, комплексные коэффициенты. Если для специальных кривых с максимальным числом овалов, построенных Петровским, эти квадратичные формы могут быть выбраны вещественными, то полученное неравенство также точное.

Вернемся к случаю произвольного  $k > 0$ . Как уже отмечалось, вырожденные отображения образуют алгебраическое подмножество коразмерности 1 в пространстве квадратичных отображений  $p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Соответственно, открытое множество всех невырожденных отображений, вообще говоря, несвязно и состоит из конечного числа компонент связности. Если невырожденные отображения  $p_1$  и  $p_2$  лежат в одной и той же компоненте связности, то  $p_1$  можно непрерывно продеформировать в  $p_2$ , оставаясь при этом в классе невырожденных квадратичных отображений. Поэтому (в силу стандартной леммы Тома) существует изотопия многообразия  $\mathbb{R}^{N-1}$ , переводящая  $p_1^{-1}(0)$  на  $p_2^{-1}(0)$ .

Аналогичная ситуация имеет место для квадратичных отображений, невырожденных относительно данного выпуклого замкнутого конуса  $K \subset \mathbb{R}^k$ , с той только разницей, что множество вырожденных отображений не является алгебраическим, вместо  $p_i^{-1}(0)$  надо рассматривать  $p_i^{-1}(K)$ , а подходящее обобщение леммы Тома приходится доказывать отдельно.

Квадратичные отображения  $p_i: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $i=1,2$ , лежащие в одной и той же компоненте связности множества всех ~~виды~~ невырожденных квадратичных отображений, будем называть гомотопными. Как уже отмечалось, топология множества уровня  $\bar{p}^{-1}(0)$  (а также топология его расположения в  $\mathbb{R}^{N-1}$ ) не меняется при гомотопии. Кроме того, как нетрудно видеть, любые "несюръективные" отображения попарно гомотопны, т.е. из условий  $p_1(\mathbb{R}^N) \neq \mathbb{R}^k$ ,  $p_2(\mathbb{R}^N) \neq \mathbb{R}^k$  следует, что  $p_1$  гомотопна  $p_2$ . Таким образом, все "непокрывающие" отображения содержатся в одной компоненте связности множества невырожденных отображений. Из утверждения, приведенного на стр. 3 вытекает, что при  $N \gg k$  они полностью заполняют эту компоненту связности и, кроме того, в любой другой компоненте  $\bar{p}^{-1}(0) \neq \emptyset$ .

Мы приступаем к систематическому изучению инвариантов гомотопии  $\bar{p}$  и в классе невырожденных отображений. Для начала следует интерпретировать понятие невырожденности квадратичного отображения  $p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^k$  относительно конуса  $K$  в терминах линейной системы квадратичных форм

$$p\mathcal{L}: \omega \mapsto \omega p, \quad \omega \in \mathcal{L} = K \circ \mathcal{L}S^{k-1} \subset \mathbb{R}^{k \times k}$$

В пространстве квадратичных форм  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  имеется гиперповерхность  $\Pi = \{q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \mid \ker q \neq \emptyset\}$  вырожденных

форм. Точка  $q \in \Pi$  - неособая точка этой гиперповерхности в том и только том случае, когда  $\dim \ker q = 1$ .

Пусть  $q \in \Pi \setminus \text{Sing } \Pi$ ,  $x \in \ker q \setminus \{0\}$ , тогда вектор

$x \circ x \in \mathbb{R}^N \circ \mathbb{R}^N = \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)^*$  является нормалью к гиперпо-

верхности  $\Pi$  в точке  $q$  (символ "o" обозначает симме-

трическое произведение). Мы назовем  $x \circ x = (-x) \circ (-x)$  положительной нормалью. Далее, для любого  $q \in \Pi$ , где точка  $q$  может быть и особой, положим  $N_q^+ = \{x \circ x \mid x \in \ker q\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)^*$  и назовем  $N_q^+$  конусом отрицательных нормалей к  $\Pi$  в точке  $q$ . Для особых точек это определение мотивируется следующим очевидным тождеством

$$N_q^+ = \bigcap_{O_q \subset \Pi, q \in O_q} \bigcup N_q^+ \quad (\text{пересечение берется по всем окрестностям точки } q \text{ в } \Pi).$$

Так вот, оказывается, что отображение  $p$  в том и только том случае невырождено относительно конуса  $K = \Omega^\circ$ , когда

$$(\text{im } p^\Omega)^\circ \cap N_{\omega p}^+ = 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \omega p \in \Pi.$$

Иными словами, отображение  $p$  вырождено в том и только том случае, когда некоторая положительная нормаль

$$v \in N_{\omega p}^+ \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)^* \text{ определяет гиперплоскость, опорную к множеству } \text{im } p^\Omega = p^*(\Omega) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \quad (\text{т.е. } \langle v, \omega p \rangle \leq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}).$$

Поскольку понятие невырожденности лежит в основе всей теории, полезно иметь подходящий геометрический образ.

I) Пусть  $\omega p$  - неособая точка гиперповерхности  $\Pi$ , т.е.  $\omega p \in \Pi \setminus \text{sing } \Pi$ , а  $\Omega$  - многообразие с краем. Тогда невырожденность "в точке  $\omega p$ " означает, что само многообразие  $p^*(\Omega)$  трансверсально гиперповерхности  $\Pi$ , а его край может касаться  $\Pi$ , но только "сверху":



- невырожденный случай;



- вырожденный случай.

Мы видим, что если в процессе гомотопии  $P_t$  в классе невырожденных отображений множества  $P^*(\Omega)$  не пересекаются с  $\text{Sing} \Pi$ , то сохраняется гомотопический тип пары  $(\Omega, \Omega_n)$  (в то время как гомотопический тип  $\Omega_n$  может, конечно, меняться). Оказывается, что при пересечении  $P^*(\Omega)$  с  $\text{Sing} \Pi$  это уже не так: не только гомотопический тип, но даже эйлерова характеристика  $\chi(\Omega, \Omega_n)$  может меняться в процессе "невырожденной" гомотопии. Можно сказать, что квадратичные отображения устроены столь нетривиально как раз из-за наличия  $\text{Sing} \Pi$ .

2) Пусть теперь  $\dim_{\mathbb{R}} \omega p = 2$ , т.е.  $\omega p \in \text{Sing} \Pi \setminus \text{Sing}(\text{Sing} \Pi)$ . Алгебраическая поверхность  $\text{Sing} \Pi$  имеет коразмерность 3 в  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^N)$ , при этом гиперповерхность  $\Pi$  локально (вблизи  $\omega p$ ) представляет собой произведение  $\text{Sing} \Pi$  на обычный двумерный круговой конус. В проекции на ортогональное дополнение к  $\text{Sing}(\text{Sing} \Pi)$  в точке  $\omega p$  получаем следующую картину:

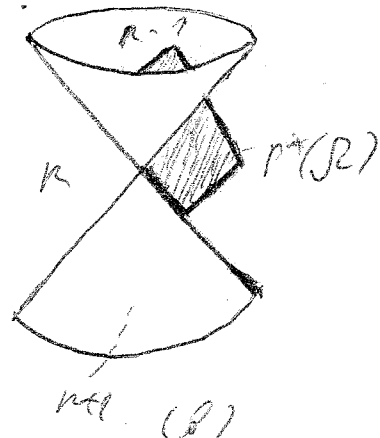
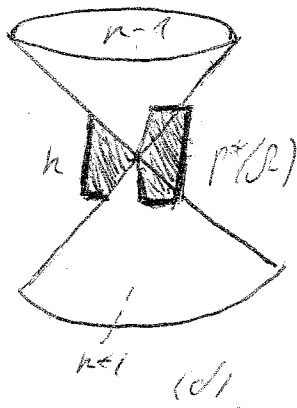
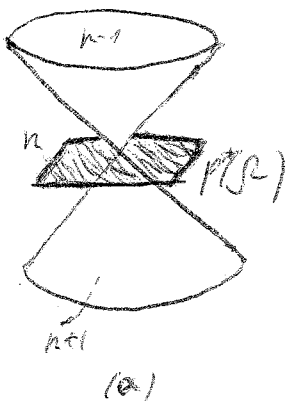
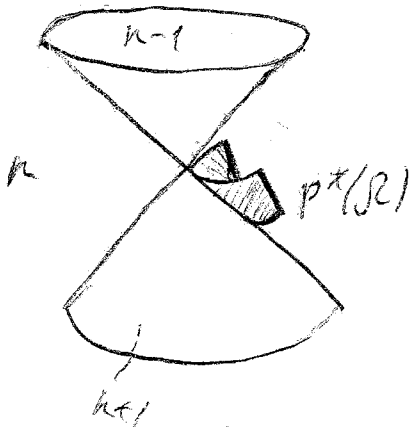
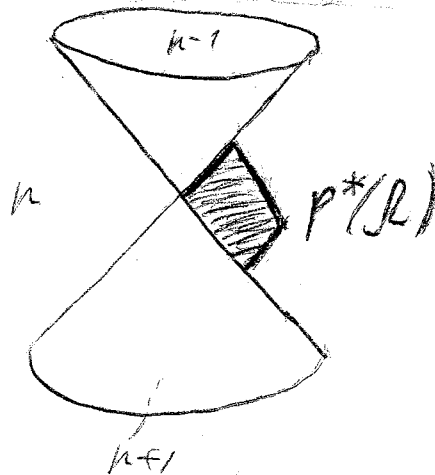


Рис. I

- невырожденные случаи;



(a)



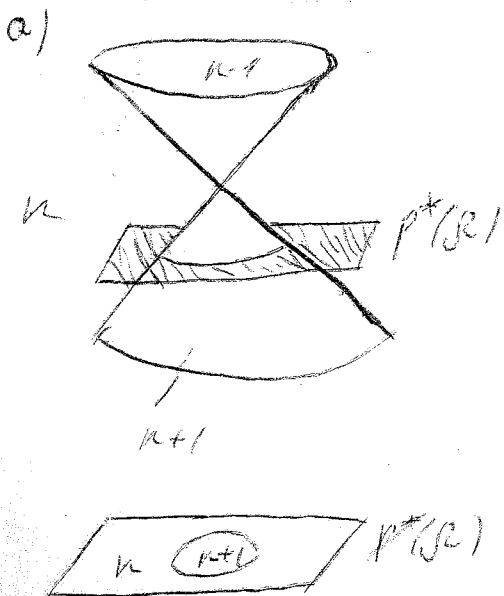
(б)

рис. 2

- вырожденные случаи.

Мы видим, что для невырожденного отображения  $p$  многообразия  $p^*(R)$  может содержать вершину конуса, но не может касаться стенок конуса, при этом его край может касаться стенок конуса, но только сверху.

Следующие два случая а), б), очевидно, гомотопны в классе невырожденных отображений



б)

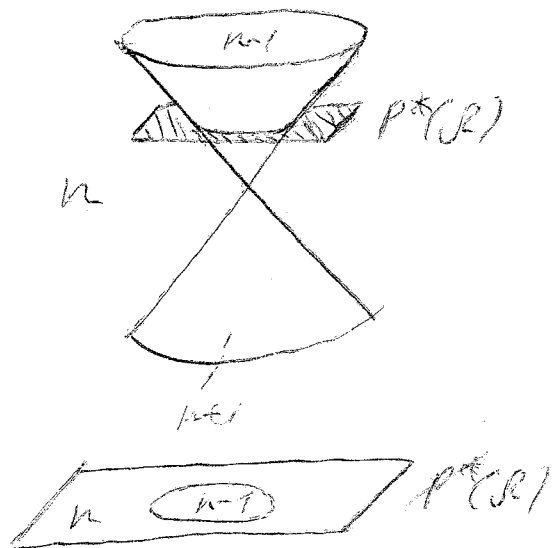


рис. 3

В случае а) имеем  $H^2(\mathcal{R}, \mathcal{R}_n) = H^0(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{n-1}) = \mathbb{Z}$ ;  
 в случае б)  $H^i(\mathcal{R}, \mathcal{R}_n) = H^i(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{n-1}) = 0, \forall i \geq 0$ .  
 Таким образом, величины

$$\chi(\mathcal{R}_{2n+1}, \mathcal{R}_{2n}) = \chi(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{2n}) - \chi(\mathcal{R}, \mathcal{R}_{2n+1}),$$

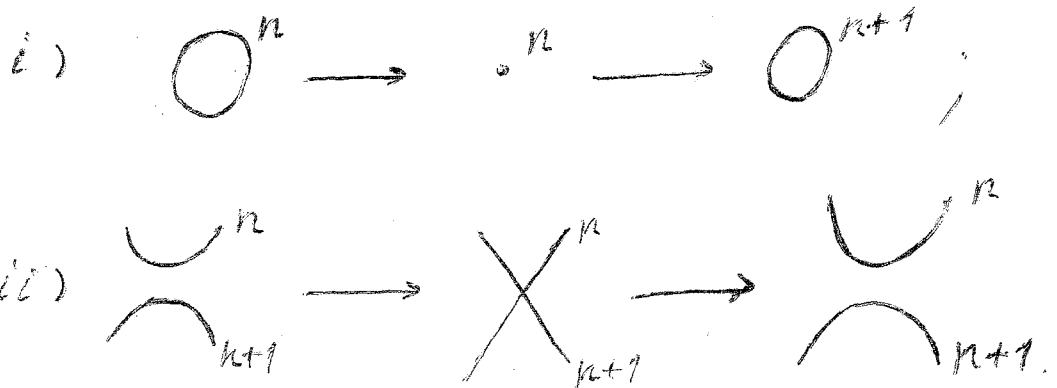
т.е. отдельные слагаемые в правой части равенства (I)

могут меняться при невырожденной гомотопии, в то же время сумма, как мы знаем, сохраняется при такой гомотопии.

Скажем еще несколько слов о связках квадратик (случай  $\mathcal{R} = S^2$ ).

Из наших картинок видно, что невырожденной связке вполне может соответствовать особая кривая вырождения

$\{\omega \in \mathbb{P}^2 \mid \det(\omega p) = 0\}$  Типичные перестройки кривой вырождения при невырожденной гомотопии легко описываются, их всего два типа:



(здесь числа  $n$  и  $n+1$  обозначают индексы квадратичных форм  $\omega p$ , когда  $\omega$  лежит на соответствующем куске кривой).

Из этого описания перестроек видно, что при невырожденной гомотопии сохраняется количество и взаимное расположение овалов кривой вырождения (также как и топологическая картина пересечения трех квадратик в  $\mathbb{P}^{N-1}$ ). В то же время



типичным вырождениям квадратичных отображений  $\mathbb{R}^N$  в  $\mathbb{R}^3$  отвечают морсовские перестройки кривой, т.е. перестройки, при которых рождаются, исчезают или переклеиваются овалы. Поэтому уместно предположить, что инварианты невырожденной гомотопии (а мы собираемся построить специальную теорию когомологий, описывающую эти инварианты) должны быть полезными и при описании расположения овалов.

Вернемся к общему случаю  $p^\Omega: \Omega \rightarrow P(\mathbb{R}^N)$ , где  $\Omega$  - пересечение  $S^{k-1}$  с выпуклым замкнутым конусом в  $\mathbb{R}^{k*}$ , а  $p^\Omega$  - сужение на  $\Omega$  некоторого линейного отображения  $p^*$ . В действительности, этот случай далеко не самый общий. Определение невырожденности легко и естественно обобщается на произвольные гладкие отображения

$f: \Omega \rightarrow P(\mathbb{R}^N)$ , где  $\Omega$  - многообразие с краем (и даже с углами, лишь бы эти углы были выпуклыми). Именно, отображение  $f$  называется невырожденным, если для всякого  $\omega \in \Omega$  из условия  $f(\omega) \in \Pi$  следует  $f'_\omega (T_\omega \Omega) \cap \Pi_{f(\omega)}^+ = 0$ .

Невырожденной гомотопией будем теперь называть произвольную гомотопию  $f_t: \Omega \rightarrow P(\mathbb{R}^N)$ ,  $t \in [0, 1]$  гладких отображений такую, что все  $f_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , невырождены.

Пусть  $f$  - невырожденное отображение и

$$\Omega_n = \{ \omega \in \Omega \mid \text{ind } f(\omega) \leq n \}. \quad \text{Положим}$$

$$\chi(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi(\Omega_{2n+1}, \Omega_{2n}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \chi(\Omega, \Omega_n)$$

и назовем величину  $\chi(f)$  эйлеровой характеристикой отображения  $f$ . Оказывается,  $\chi(f)$  сохраняется при произвольной

(нелинейной) невырожденной гомотопии, в то время как отдельные слагаемые  $\chi(\Omega, \Omega_n)$  могут, конечно, меняться. Мы сейчас приведем одно элегантное выражение для  $\chi(A)$ , которое, в отличие от альтернированной суммы, "по определению" - инвариант невырожденной гомотопии.

Как уже отмечалось,  $\text{sing } \Pi$  имеет коразмерность 3 в  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^M)$ , следовательно, гиперповерхность  $\Pi$  - псевдомногообразие. Для всякого  $p \in \Pi \setminus \text{sing } \Pi$  пусть  $\nu_p$  - положительная нормаль к  $\Pi$  в точке  $p$ . Рассмотрим произвольный нульмерный цикл  $c_0 = \sum \alpha_i q_i$  в  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^M) \setminus \Pi$  ( $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ ,  $q_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^M) \setminus \Pi$ ); если псевдомногообразие  $\Pi$  ориентировать с помощью нормалей  $\nu_p$ , то коэффициент зацепления получившегося цикла коразмерности 1 с циклом  $c_0$  будет равен  $-\sum \alpha_i \text{ind } q_i$ ; если же ориентировать  $\Pi$  с помощью нормалей  $(-1)^{\text{ind } p} \nu_p$ , то коэффициент зацепления будет равен  $-(\sum \alpha_i \text{ind } q_i) \text{ mod } 2$ .

Пусть  $k > 0$ , рассмотрим совокупность всех  $k$ -мерных ориентированных плоскостей, касательных к  $\Pi$ , при этом, если  $p \in \text{sing } \Pi$ , то плоскость считается касательной к  $\Pi$  в точке  $p$  в том и только том случае, когда она ортогональна хотя одной ненулевой нормали из  $\mathcal{N}_p^+$ . Оказывается, эта совокупность плоскостей является ориентируемым псевдомногообразием коразмерности  $k+1$  в  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^M) \times G_k^+(\mathcal{P}(\mathbb{R}^M))$ , обозначим это псевдомногообразие  $G_k^+(\Pi)$ . В отличие от случая  $k=0$ , множество особых точек в  $G_k^+(\Pi)$  связно и првизвола в выборе ориентаций нет; ориентированное псевдомногообразие  $G_k^+(\Pi)$  определяет гомологичный нулю цикл в  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^M) \times G_k^+(\mathcal{P}(\mathbb{R}^M))$ .

Пусть  $f: M^k \rightarrow P(\mathbb{R}^N)$  - иммерсия гладкого ориентированного компакта многообразия  $M^k$  в  $P(\mathbb{R}^N)$ .

Соответствие  $x \mapsto (f(x), \text{im} f'(x))$  определяет отображение многообразия  $M^k$  в  $P(\mathbb{R}^N)$ .

Получившийся таким образом  $k$ -мерный цикл в  $P(\mathbb{R}^N) \times G_k^+(P(\mathbb{R}^N))$  обозначим  $Tf$ .

Отображение  $f$  в том и только том случае невырождено, когда  $Tf$  имеет пустое пересечение с  $G_k^+(\Pi)$ .

Пусть  $p_0 \in P(\mathbb{R}^N)$  - фиксированная положительная форма; нетрудно видеть, что цикл  $(T(f + \epsilon p_0) - Tf)$  гомологичен нулю в  $P(\mathbb{R}^N) \times G_k^+(P(\mathbb{R}^N)) \forall \epsilon \in \mathbb{R}$ . Кроме того, если

$\epsilon > 0$  достаточно велико, то  $f(x) + \epsilon p_0 > 0 \forall x \in M^k$ .

Оказывается, в этом случае эйлерова характеристика  $\chi(f)$

совпадает с коэффициентом зацепления циклов

$T(f + \epsilon p_0) - T(f)$  и  $G_k^+(\Pi)$ .

Интуитивно, этот коэффициент зацепления равен алгебраическому

числу точек касания гиперповерхности  $\Pi$  с

многообразиями  $f(M^k) + \epsilon p_0$ ,  $\epsilon \in [0, \epsilon]$ .

**З а м е ч а н и е.** Строго говоря, введенные нами циклы определены здесь лишь с точностью до знака, а знак эйлеровой характеристики фиксирован; утверждение о равенстве эйлеровой характеристики коэффициенту зацепления предполагает, конечно, соответствующее соглашение о знаках на каждом этапе построения циклов.

Мы уже не раз отмечали, что гомотопический тип пары  $(\Omega, \Omega_n)$  может перестраиваться в процессе невырожденной гомотопии, но происходит это лишь в том случае, когда

множество  $f(\Omega)$  содержит особые точки гиперповерх-

ности  $\Pi$ . Оказывается, весь секрет в том, что конус неотрицательных нормалей  $N_q^+$  не является выпуклым при  $q \in \text{Sing } \Pi$

О п р е д е л е н и е. Гладкое отображение  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  назовем трансверсальным, если  $\forall \omega \in \Omega$  из условия  $f(\omega) \in \Pi$  следует  $f'_\omega(T_\omega \Omega)^\circ \cap \text{cong } N_{f(\omega)}^+ = \emptyset$

Например, рисунки б) и в) изображают трансверсальные отображения, а рисунок а) — невырожденное, но не трансверсальное.

Произвольную гомотопию, не выводящую из класса трансверсальных отображений, назовем трансверсальной гомотопией. Можно показать, что при трансверсальной гомотопии сохраняется гомотопический тип пары  $(\Omega, \Omega_n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

В частности, таблица

$H^0(\Omega, \Omega_0), \dots, H^N(\Omega, \Omega_0), \dots$
$H^0(\Omega, \Omega_1), \dots, H^N(\Omega, \Omega_1), \dots$
$\dots$
$H^0(\Omega, \Omega_i), \dots, H^N(\Omega, \Omega_i), \dots$
$\dots$

сплошь состоит из инвариантов трансверсальной гомотопии. Нас, однако, интересуют инварианты невырожденной гомотопии. Пока мы

знаем лишь, что эйлерова характеристика этой таблицы

$$\sum_{i,j} (-1)^{i+j} \text{rank } H^i(\Omega, \mathcal{R}_j) = \sum_j (-1)^j \chi(\Omega, \mathcal{R}_j) = \chi(A)$$

- такой инвариант.

Чтобы лучше понять разницу между двумя видами гомотопии, обратимся снова к малым размерностям. Если многообразие (с краем)  $\Omega$  одномерно, то трансверсальная гомотопность двух трансверсальных отображений  $f_1: \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  и  $f_2: \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  эквивалентна их невырожденной гомотопности. В самом деле, трансверсальность отличается от невырожденности лишь в том случае, когда  $f(\Omega) \cap \text{sing } \Pi \neq \emptyset$ . Однако  $\text{sing } \Pi$  имеет коразмерность 3 в  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  и, деформируя одно отображение в другое, мы всегда можем миновать  $\text{sing } \Pi$ . Таким образом, в одномерном случае приведенная выше таблица (которая в этом случае имеет лишь два ненулевых столбца) является инвариантом невырожденной гомотопии. Для пучков квадратичных форм  $\omega \mapsto \omega_P, \omega \in S^1$  нетрудно показать, что код пучка (см. выше) однозначно восстанавливается по этой таблице.

Если  $\Omega$  двумерно, то невырожденная гомотопность и трансверсальная гомотопность уже не эквивалентны. В принципе, это видно из рисунка 3, но рисунок изображает лишь локальную ситуацию; чтобы представить картину в целом, разберем случай связки трех квадратик в  $\mathbb{R}^3$ , т.е. квадратичные отображения

$$P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

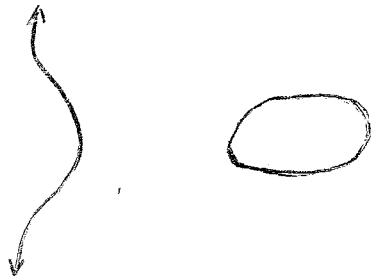
**Предложение.** Для типичного квадратичного отображения  $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  из условия  $\text{deg } \bar{P} = 0$  следует, что  $P(\mathbb{R}^3) \neq \mathbb{R}^3$

Доказывается это предложение совсем просто.

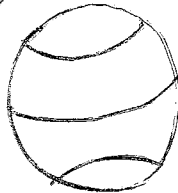
Рассмотрим индуцированное  $P$  отображение  $\bar{P}: P^2 \rightarrow R^3$ , невырожденность отображения  $P$  эквивалентно тому, что  $\bar{P}(P^2)$  не содержит начало координат в  $R^3$ . Поэтому определена степень  $\deg \bar{P} \in Z_2$  отображения  $\bar{P}$  относительно нуля.

плоскости в сфере). Рассмотрим прямую общего положения  $l = l^+ \cup l^-$  в  $R^3$ , проходящую через начало (через  $l^+$  и  $l^-$  обозначены два луча, на которые прямая разбита началом координат). Множества  $\bar{P}^{-1}(l^+)$  и  $\bar{P}^{-1}(l^-)$  должны состоять из четного числа точек. В то же время множество  $\bar{P}^{-1}(l) = \bar{P}^{-1}(l^+) \cup \bar{P}^{-1}(l^-)$  есть пересечение двух квадрик в  $P^2$  и, следовательно, по теореме Безу, либо пусто, либо состоит из двух, либо из четырех точек. Если хоть одно из множеств  $\bar{P}^{-1}(l^+)$ ,  $\bar{P}^{-1}(l^-)$  пусто, то предложение доказано. Остается еще возможность  $\# \bar{P}^{-1}(l^+) = \# \bar{P}^{-1}(l^-) = 2$ , т.е. для любого луча общего положения  $\lambda$  с вершиной в начале координат множество  $\bar{P}^{-1}(\lambda)$  состоит ровно из двух точек. Однако поскольку отображение  $x \mapsto \frac{\bar{P}(x)}{|x|}$  имеет степень нуль, то это отображение должно иметь складки, и прообраз луча, лежащего по одну сторону складки имеет на две точки больше, чем по другую. Полученное противоречие доказывает предложение.

Рассмотрим теперь связку квадрик  $P^*: \omega \mapsto \omega P, \omega \in S^2$ . Кривая вырождения  $\{\omega \mid \det \omega P = 0\}$  является кубической кривой, в проективной плоскости она имеет вид:

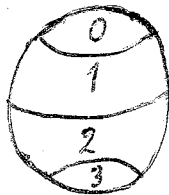


При переходе к двулистному накрытию (на сферу  $S^2$ ) овал раздвигается, а вторая компонента, реализующая ненулевой цикл в  $\mathbb{R}^2$ , - нет. Получаем следующую картину



Поскольку для невырожденной формы  $\omega_P$  имеем  $ind(-\omega_P) = 3 - ind \omega_P$ , а соседние области имеют соседние индексы, то возможно лишь два способа разбиения  $S^2$  на области с различными индексами:

а)



б)

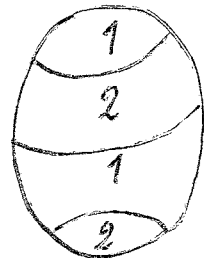
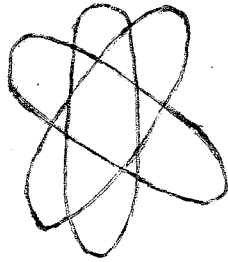
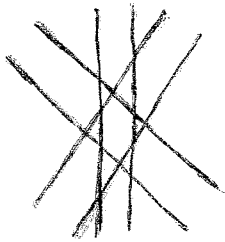


Рис. 4

Случай а) отвечает ситуации, когда для некоторого  $\omega \in S^2$  форма  $\omega_P$  положительно определена. Картинка б) возникает в следующем случае. Пусть  $P = (P_1, P_2, P_3)^T$  и уравнения  $\bar{P}_i(x) = 0, i = 1, 2, 3$  определяют в  $\mathbb{R}^2$  эллипсы, расположенные как указано на рисунке:



или особые квадрики, в соответствии с рисунком



Выписав соответствующие уравнения, нетрудно убедиться, что форма  $\omega p$  <sup>не</sup> знакоопределена для любого  $\omega \in S^2$  и, следовательно, имеет место ситуация б).

Случай а) и б), конечно, не являются трансверсально гомотопными: например, в случае а)  $H^0(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = 0$ , а в случае б)  $H^0(\mathcal{R}, \mathcal{R}_0) = \mathbb{Z}$

**З а м е ч а н и е.** При  $k=1, 2$  образ квадратичного отображения  $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  обязательно является выпуклым конусом, и соотношение  $p(\mathbb{R}^n) \neq \mathbb{R}^k$  эквивалентно условию:  $\omega p \geq 0$  для некоторого  $\omega \in S^{k-1}$ . Рассмотренная только что ситуация б) для  $N=K=3$  дает простейший пример квадратичного отображения с невыпуклым образом. В этом пункте отказывает выпуклый анализ — привычное орудие для специалиста по оптимизации. Особенность ситуации, конечно, не в том, что встретилось нечто невыпуклое, а в том, что невыпуклость возникает при инфинитезимальном исследовании, и, как ни дифференцируй, от нее не избавиться. Настоящая причина этого явления, конечно, состоит в невыпуклости конуса нормалей  $N_q^+$  — инфинитезимального объекта! — для  $q \in \text{Sing } \Pi \subset P(\mathbb{R}^n)$



Возвращаясь к сравнению невырожденной и трансверсальной гомотопий, заметим, что приведением в общее положение произвольной невырожденной гомотопии  $f_t: \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ ,  $t \in [0, 1]$  можно добиться того, чтобы трансверсальность нарушалась лишь для изолированных значений параметра  $t$ .

Таким образом, при типичной невырожденной гомотопии таблица  $\{H^k(\Omega, \Omega_n)\}_{k, n \geq 0}$  (см. стр. 20)

претерпевает "перестройки" лишь для изолированных значений параметра  $t$ . Учет того, что сохраняется при этих перестройках, приводит к специальной теории когомологий. Величина  $\chi(f)$  является эйлеровой характеристикой в такой теории когомологий, а таблица  $\{H^k(\Omega, \Omega_n)\}_{k, n \geq 0}$  задает член  $E_2$  спектральной последовательности, позволяющей вычислять эти когомологии.

Мы введем теорию когомологий аксиоматически, затем опишем простой геометрический образ, который за этим стоит, и на примерах объясним, как все это работает.

Рассмотрим категорию, объектами которой являются невырожденные отображения

$$f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N),$$

где  $\mathcal{K}$  - кусочно-гладкий комплекс<sup>\*</sup>).

---

<sup>\*</sup>) Точное определение кусочно-гладкого комплекса см. в § 3, п. 2 текста "Квадратичные отображения и семейства квадратичных форм". В действительности, это комплекс в котором роль клеток играют многообразия с углами  $\Omega$ . Отображение  $f$  называется невырожденным, если оно непрерывно, а сужения  $f|_{\Omega}$  - гладкие и невырожденные отображения.

Морфизмами из  $f_1: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  в  $f_2: \mathcal{K}_2 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  являются такие непрерывные отображения  $\varphi: \mathcal{K}_1 \rightarrow \mathcal{K}_2$ , что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{K}_2 \\ & \searrow f_1 & \swarrow f_2 \\ & \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) & \end{array}$$

коммутативна.

Пусть  $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  - невырожденное отображение и  $\mathcal{K} \supset \mathcal{L}$  - подкомплекс. Пары  $(f, f|_{\mathcal{L}})$  являются объектами очевидным образом определяемой категории "пар невырожденных отображений". Теория когомологий состоит из контравариантного функтора  $H^*$  из категории "пар невырожденных отображений" в категорию  $\mathcal{Z}$  - градуированных конечномерных векторных пространств над полем  $\mathbb{Z}_2$  (т.е. <sup>мы</sup> используем когомологии с коэффициентами  $\text{mod } 2$ ), а также естественного преобразования  $\delta: H^*(f|_{\mathcal{L}}) \rightarrow H^{*+1}(f, f|_{\mathcal{L}})$  степени  $+1$ . Теория когомологий удовлетворяет системе аксиом, которые моделируют аксиомы Стиррода - Эйленберга для обычных когомологий топологических пространств (см. [Спенсер]). Две аксиомы - точности и вырезания - повторяются дословно. Остальные две (аксиомы гомотопии и размерности) специфичны для нашей теории.

Аксиома гомотопии. Пусть  $F: [0, 1] \times \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  таково, что отображения  $f_t = F|_{t \times \mathcal{K}}$ ,  $t \in [0, 1]$  невырождены. Тогда вложения  $t \times \mathcal{K} \rightarrow [0, 1] \times \mathcal{K}$  индуцируют изоморфизм групп когомологий  $H^*(F)$  и  $H^*(f_t)$ .

Для того, чтобы система аксиом была полной, осталось описать когомологии в случае, когда  $\mathcal{K}$  состоит из одной точки. Невырожденное отображение  $f: * \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  точки

в  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  - это просто неособая квадратичная форма  $q = f(*) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ .

Аксиома размерности. Для любой неособой квадратичной формы  $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  и любого  $i \in \mathbb{Z}$  имеет место равенство

$$H^i(q) = H^{-i}(\mathbb{P}^{\text{ind} q - 1}; \mathbb{Z}_2). \quad (3)$$

Здесь очень хорошо видна специфика наших когомологий: группы когомологий точки зависят от расположения этой точки в  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ . Следует, видимо, объяснить, почему эти группы именно таковы, как указано в равенстве (3). Дело в том, что если первые три аксиомы можно рассматривать как пожелание: "Было бы хорошо, если бы существовала теория когомологий с такими свойствами", то последняя аксиома определяет сами группы когомологий. Для объяснения мы должны вспомнить тождество (I), в правой части которого стоит эйлерова характеристика отображения  $\omega \mapsto \omega p$ ,  $\omega \in \Omega$ , а в левой - эйлерова характеристика множества  $\{x \in \mathbb{P}^{N-1} \mid \omega p(x) \leq 0, \forall \omega \in \Omega\}$ . Нетрудно видеть, что для неособой формы  $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  множество  $\{x \in \mathbb{P}^{N-1} \mid q(x) \leq 0\}$  имеет гомотопический тип многообразия  $\mathbb{P}^{\text{ind} q - 1}$ . Равенство (3) означает, что в случае, когда  $\Omega$  состоит из одной точки, совпадают не только эйлеровы характеристики, но и группы когомологий. Замена знака у номера группы когомологий ( $H^i$  на  $H^{-i}$ ) связана с тем, что  $\mathbb{P}^{N-1}$  и  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$  - двойственные объекты (см. доказательство тождества (I), объединение меняется местами с пересечением и т.д.).

Какова связь групп когомологий  $H(P^{\mathbb{R}^n})$  и  $H(\bar{P}^1(\mathbb{R}^n))$  для произвольного  $\mathbb{R}^n$  мы пока не знаем, однако сочетание равенства (3) с тем фактом, что группы  $H(P^{\mathbb{R}^n})$  сохраняются при невырожденной гомотопии показывает, что эта связь должна быть весьма тесной.

Положим  $\mathcal{K}_n = \{\omega \in \mathcal{K} \mid \text{ind } f(\omega) \leq n\}$ .

Существует когомологическая спектральная последовательность четвертой четверти  $(E_r, d_r)$ ,  $r=2,3,\dots$ , член  $E_2$  которой имеет вид  $E_2^{-n,m} = H^m(\mathcal{K}, \mathcal{K}_n; \mathbb{Z}_2)$ , а член  $E_\infty$  присоединен к  $H(f)$ . Замечательно то, что все высшие дифференциалы этой спектральной последовательности выражаются через стандартные хорошо известные когомологические операции: дифференциал

$$d_2: H^m(\mathcal{K}, \mathcal{K}_n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^{m+2}(\mathcal{K}, \mathcal{K}_{n+1}; \mathbb{Z}_2)$$

через обычное когомологическое умножение, а дифференциалы  $d_r$  при  $r > 2$  - через операции Масси.

Посмотрим теперь, как все это выглядит для простейшей перестройки, изображенной на рис. 3, когда  $\mathcal{K}$  - двумерный диск. Член  $E_2$  в случаях а) и б) имеет следующий вид (в приводимых ниже таблицах число, стоящее в  $n$ -й строке и  $m$ -м столбце совпадает с  $\dim E_2^{-n,m}$ ).

а)

	0	1	2	...
0	1	0	0	
...	...	...	...	
$n-2$	1	0	0	0
$n-1$	1	0	0	
$n$	0	0	1	
	0		0	0

б)

	0	1	2	...
0	1	0	0	
...	...	...	...	0
$n-2$	1	0	0	
	0		0	0

В случае а) дифференциал  $d_2: E_2^{1-n,0} \rightarrow E^{-n,2}$  ненулевой, поэтому члены  $E_3 = E_\infty$  совпадают для случаев а) и б).

Пусть теперь двумерный диск отображается в  $P(R^N)$  несколько иначе:

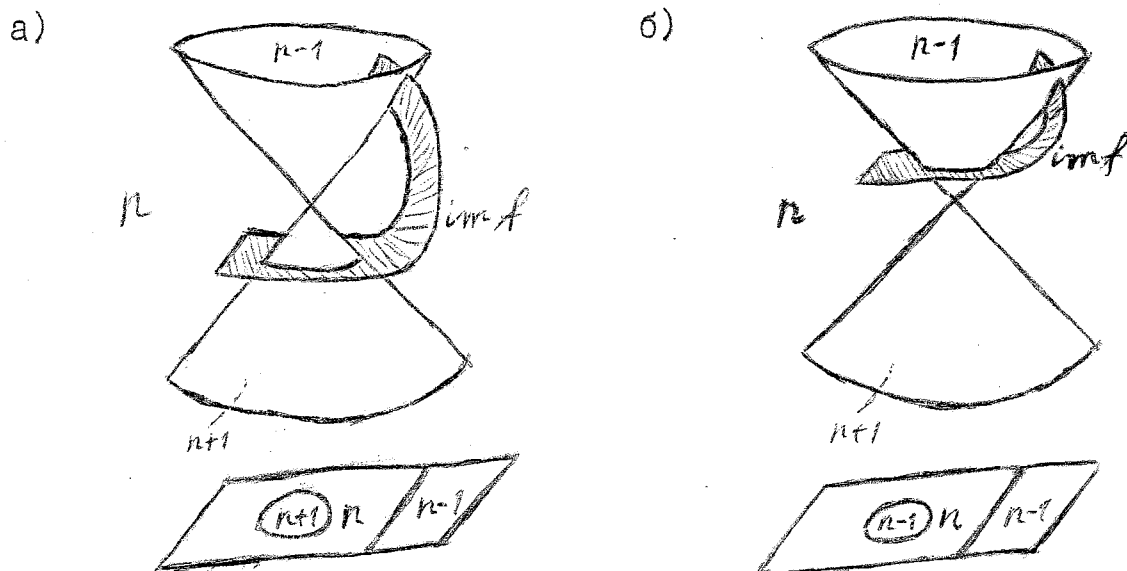


Рис. 5

Легко видеть, что ситуации а) и б) на рис. 5 невырожденно гомотопны. Член  $E_2$  имеет вид:

а)

	0	1	2	...
0	1	0	0	
...	...	...	...	
(n-2)	1	0	0	
(n-1)	0	0	0	
n	0	0	1	
	0			0

б)

	0	1	2	
0	1	0	0	
...	...	...	...	
(n-2)	1	0	0	
(n-1)	0	1	0	
	0			0

Как в случае а), так и в случае б) ненулевых дифференциалов быть не может, поэтому  $E_2 = E_\infty$ . Мы видим, что таблица  $E_\infty$  может меняться при невырожденной гомотопии, однако суммы элементов вдоль диагоналей (т.е. размерности пространств  $H^m(\mathcal{F})$ ) сохраняются.

Интересно, что нулевой столбец члена  $E_\infty$  все же сохраняется при невырожденной гомотопии. Именно, у нашей спектральной последовательности имеется следующий "краевой эффект".

**Предложение.** Существуют такие естественные преобразования  $\beta_n: H^{-n}(\mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{K}, \mathcal{K}_n; \mathbb{Z}_2)$ ,  $n=0,1,\dots$  что  $\text{im } \beta_n = E_\infty^{-n,0}$ .

Еще одно полезное свойство спектральной последовательности - "оценка сверху дифференциалов  $d_{r,2}$ " - заключено в следующем утверждении.

**Предложение.** Пусть

$\nu_n: H^m(\mathcal{K}, \mathcal{K}_n; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^m(\mathcal{K}, \mathcal{K}_{n-2+1}; \mathbb{Z}_2)$  - гомоморфизмы, индуцированные вложениями

$$\mathcal{K}_{n-2+1} \subset \mathcal{K}_n.$$

Тогда

$$\nu_n \circ d_n = d_{n-2} \circ \nu_n = 0.$$

Приведенной информации уже достаточно для того, чтобы вычислить когомологии в некоторых интересных случаях.

Пусть невырожденное квадратичное отображение  $p: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^K$  таково, что  $p(\mathbb{R}^N) \neq \mathbb{R}^K$  и  $p^*: \omega \mapsto \omega p$ ,  $\omega \in S^{K-1}$ . Как мы знаем, все квадратичные отображения, обладающие таким



ВИД

$$\begin{array}{|cc} \hline 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \end{array}$$

Здесь *a priori* может быть отличен от нуля дифференциал  $d_2: E^{q,0} \rightarrow E^{-1,2}$ . Дифференциал  $d_2$  всё же равен нулю, поскольку  $V_2: E^{-1,m} \rightarrow E^{0,m}$  — изоморфизм, и  $V_2 \circ d_2 = d_2 \circ V_2 = 0$ . Таким образом, группы когомологий  $H^i(R^*)$  изоморфны группам  $H^i(I_2^*)$  при  $N=4, K=3$  (в этом нет ничего странного, т.к.  $R^{-1/0} = I_2^{-1/0} = 0$ ).

Тем не менее, из отмеченного выше краевого эффекта спектральной последовательности вытекает, что  $R^*$  и  $I_2^*$  не являются невырожденно гомотопными. В самом деле, группы  $E_2^{0,0} = E_\infty^{0,0}$  и  $E_2^{-1,0} = E_\infty^{-1,0}$  равны нулю для  $I_2^*$  и равны  $\mathbb{Z}_2$  для  $R^*$ . Таким образом, мы с помощью чисто гомологических инвариантов ухватили нетривиальность отображения Хопфа (разумеется, в классе квадратичных отображений).

Выше мы исследовали квадратичные отображения из  $\mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{R}^3$ . На рис. 4 изображены два возможных разбиения  $S^2$  на области с различными индексами, этим разбиениям соответствуют разные таблицы  $E_2$ .

В случае а) член  $E_2$  ( ) такой же, как и для  $I_2^*$  (при  $N=K=3$ ). В случае б) член  $E_2$  имеет вид

$$\begin{array}{|cccc} \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$



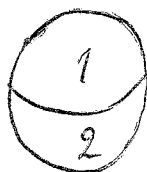
ситуация

Поскольку  $\gamma_0$  невырожденно гомотопна ситуации а), то дифференциал  $d_2: E^{0,0} \rightarrow E^{-1,2}$  здесь ненулевой и член  $E_3 = E_\infty$  выглядит так:

$$\begin{array}{|ccc|} \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 0 \\ \hline \end{array}$$

Заметим, что рис. 4 отвечает случаю, когда кубическая кривая в  $\mathbb{P}^2$ , заданная уравнением  $\det w_p = 0$ , неособа и имеет две компоненты связности. Однако неособая кубическая кривая в  $\mathbb{P}^2$  может состоять и из единственной компоненты связности. Оказывается, в этом случае  $P$  не может быть невырожденно гомотопным  $I_2^*$  и, следовательно, отображение  $\bar{P}/\bar{P}_1: \mathbb{P}^2 \rightarrow S^2$  имеет ненулевую степень.

В самом деле, получаем следующее разбиение на области с различными индексами и таблицу  $E_2$



$$\begin{array}{|ccc|} \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \\ \hline \end{array}$$

Дифференциал  $d_2$  нулевой в силу равенства  $\nu_2^0 d_2 = 0$ . Следовательно,  $E_2^{0,0} = E_\infty^{0,0} = \mathbb{Z}_2$

Эта ситуация реализуется когда  $P = (P_1, P_2, P_3)^T$ , причем уравнения  $P_i(x) = 0, i=1,2,3$  определяют в  $\mathbb{P}^2$  эллипсы, расположенные в соответствии с рисунком

