**Entrance Examination 1994-95**

Svolgere a scelta uno dei seguenti temi d'esame, discutendo in dettaglio gli esempi concreti richiesti:

1) Un corpo rigido con asse di simmetria (ad esempio un cubo omogeneo) che si muove nell spazio è un sistema completamente integrabile che ammette un "grosso" gruppo di simmetrie.

Discutere, alla luce di questo esempio, il ruolo delle simmetrie e della completa integrabilià in meccanica.

2) Discutere la classificazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del secondo ordine utilizzando gli esempi classici della fisica matematica.

3) Si derivino le espressioni per l'energia media $\bar{E}$, l'energia quadratica media $\bar{E}^2$ e la fluttazione quadratica media $\bar{\Delta}E^2$, $(\Delta E = E - \bar{E})$ per un sistema (microscopico o macroscopico) in contatto con un bagno termico a temperatura $T$. Si applichino i risultati ottenuti al caso dell'oscillatore armonico e al caso di una collezione di $N$ oscillatori armonici identici. Si discutano i risultati.

4) Si consideri l'operatore:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \gamma \sin|x|$$

definito sulle funzioni due volte differenziabili di $\mathbf{R}$ a supporto compatto. $\gamma$ è un parametro reale che soddisfa $|\gamma| < 1/2$.

L'operatore $H$ è chiudibile come operatore su $L^2(\mathbf{R}, dx)$ e la sua chiusura $\bar{H}$ è un operatore autoaggiunto.

Dimostrare che lo spettro di $\bar{H}$ è puntuale, e determinare il comportamento asintotico degli autovalori $\lambda_n$ per $n$ grande e la dimensione del sottospazio corrispondente ai primi $n$ autovalori.

Dimostrare inoltre che per $\beta$ sufficientemente grande, l'operatore $(\bar{H} + \beta I)^{-1}$ è un operatore di Hilbert–Schmidt.

Per quali altri valori del numero complesso $z$ l'operatore $(\bar{H} + zI)^{-1}$ è di Hilbert–Schmidt?

Utilizzando la simmetria della funzione $\sin|x|$ è possibile estendere i risultati precedenti al caso $\gamma < 1$?.

*Facoltativo*

Dimostrare l'affermazione fatta qui sopra secondo cui $H$ è chiudibile e che la sua chiusura è un operatore autoaggiunto.

Discuss one of the following subjects at your choice, giving a detailed treatment of the concrete examples involved.

1) A rigid body with a symmetry axix (*e.g.* a homogeneous cube) moving in space is a completely integrable system with a large symmetry group.

In this connection, discuss the role of symmetry and complete integrability in Mechanics.

2) Discuss the classification of second order linear partial differential equations by using the classical examples of Mathematical Physics.

3) Provide expression for the mean energy $\bar{E}$, the mean sqaure energy$\bar{E}^2$ and the mean square energy fluctuation $\bar{\Delta}E^2$, $(\Delta E = E - \bar{E})$ for a system (microscopic or macroscopic) in contact with a heat bath at a temperature $T$. Apply the results to a harmonic oscillator and to a collection of $N$ identical harmonic oscilllators. Discuss the results.

4) Consider the operator:

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \gamma \sin|x|$$

defined on twice–differentiable functions on $\mathbf{R}$ with compact support. $\gamma$ is a real parameter satisfying $|\gamma| < 1/2$.

The operator $H$ is closable as an operator in $L^2(\mathbf{R}, dx)$and its closure $\bar{H}$ is self–adjoint.

Prove that $\bar{H}$ has only point spectrum and establish the asymptotic behaviour of the eigenvalues $\lambda_n$ for large $n$ as well as the dimension of the eigenspace corresponding to the first $n$ eigenvalues. Prove moreover that for $\beta$ sufficiently large, the operator $(\bar{H} + \beta I)^{-1}$ is of Hilbert–Schmidt class.

Which are the other values of the coplex parameter $z$ for which the operator $(\bar{H} + zI)^{-1}$ is Hilbert–Schmidt?

Using the symmetry of the function $\sin|x|$ is it possible to extend the previous results to the case $\gamma < 1$?.

*Optional*

Prove the above statement about the closability of $H$ and the self–adjointness of $\bar{H}$.