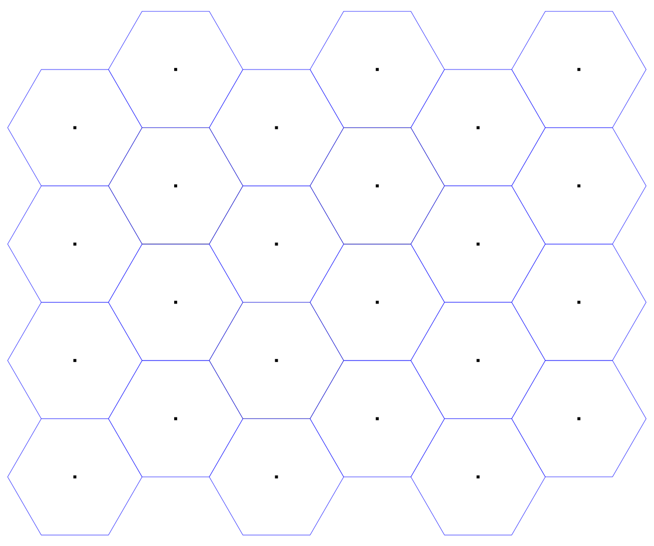
Open Day @ SISSA

Functional Analysis Sector

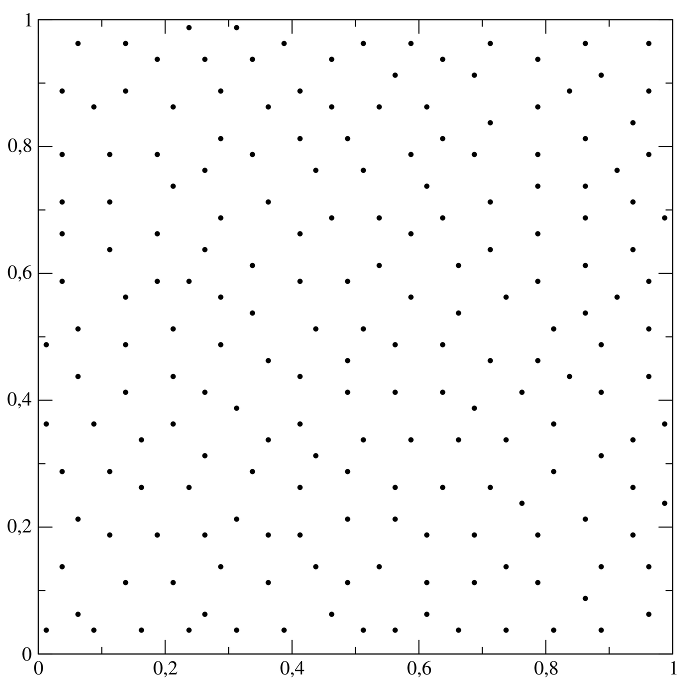
SISSA/ISAS, Trieste

Il problema di Optimal Location

Un modo di misurare l'efficienza della dislocazione di centri di produzione è la distanza media di una distribuzione uniforme di consumatori dal centro di produzione più vicino dato che i costi di trasporto sono approssimativamente proporzionali alla distanza.
Un problema che si può considerare è quello di pianificare la dislocazione di un determinato numero di centri di produzione in una data regione. Questo problema viene "risolto" suddividendo la regione in esagoni regolari della stessa area e posizionando le unità di produzione nei centri di questi esagoni.

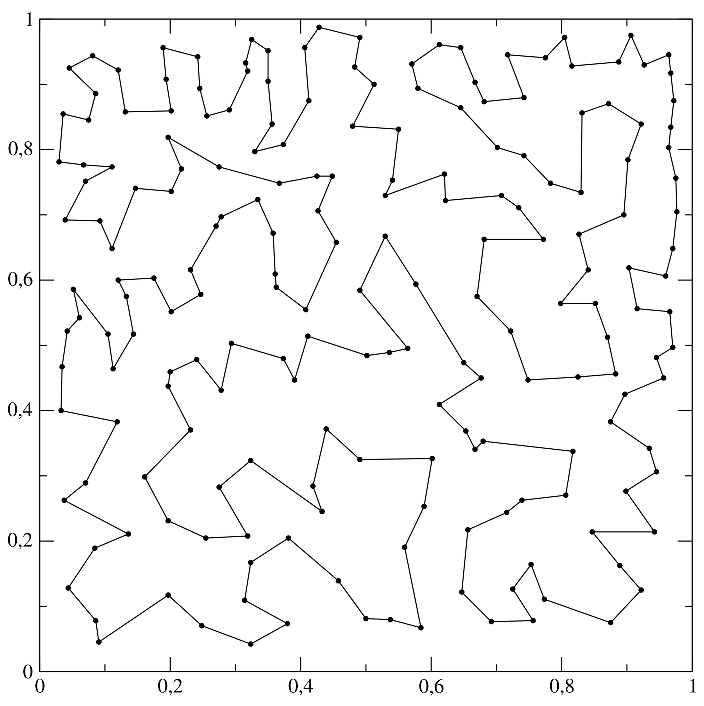


Un altro problema che si può studiare è la pianificazione "a breve termine" che tiene conto di eventuali centri di produzione già presenti sul territorio e aggiunge ogni volta un centro di produzione soltanto.



Il problema del commesso viaggiatore

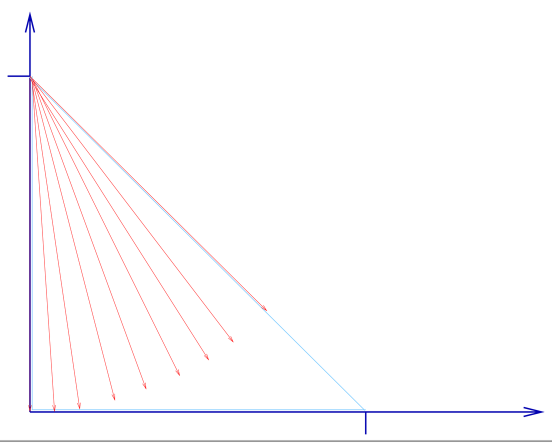
Il problema tipico del commesso viaggiatore consiste nel visitare un determinato numero di città e ritornare alla fine nella sua città di origine minimizzando la lunghezza della strada da percorrere.
Mentre è immediato notare che il problema ammette sicuramente un cammino di minima lunghezza, non è possibile calcolare esplicitamente la lunghezza del percorso più corto analizzando le lunghezze di tutti i possibili itinerari. Infatti, se il commesso viaggiatore deve visitare 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ..., n città il numero di possibili percorsi è 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, ..., $(n-1)!$ portando a tempi di calcolo non sostenibili.
La lunghezza del percorso ottimale può essere trovata con il metodo di *simulated annealing*. Questo metodo viene utilizzato per risolvere svariati problemi di *ottimizzazione combinatoria*.
Il nome e l'idea del metodo nascono dalla metallurgia e dal processo di tempratura. Il materiale viene scaldato e poi raffreddato in modo controllato per ridurre i difetti della sua struttura. Il calore fornito agli atomi permette a questi di modificare la propria posizione (un minimo locale dell'energia del sistema) e di muoversi casualmente in uno stato di alta energia. Il raffreddamento lento dà loro la possibilità di trovare configurazioni di energia minore di quella iniziale.
Ogni passo dell'algoritmo consiste nel sostituire l'attuale configurazione con una "vicina" scelta con una probabilità che dipende sia dalla differenza della funzione da ottimizzare sia da un parametro T (detto *temperatura*) che viene diminuito durante il processo.



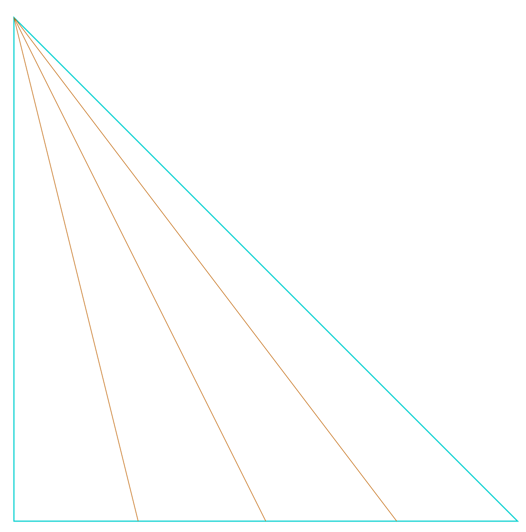
Il problema di Kakeya

Ogni sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ che contenga un segmento di lunghezza unitaria in ogni direzione è chiamato *insieme di Kakeya*.
Nel 1920 il matematico russo Besicovitch dimostrò che esistono insiemi di Kakeya di area nulla.
Il suo risultato purtroppo non venne subito diffuso al di fuori della Russia e solo molti anni dopo, quando emigrò, Besicovitch venne a sapere che in Giappone c'era un altro matematico, Kakeya, che si stava ponendo un problema simile già dal 1917.
Il problema di Kakeya era: "Qual è nel piano l'insieme di area minima in cui un ago può ruotare di 180 gradi?"
Una formulazione alternativa sarebbe trovare il minimo spazio di manovra necessario per parcheggiare una macchina a forma di ago.
Nel 1921 Pal aveva dimostrato che tra gli insiemi convessi quelli che risolvono il problema di Kakeya sono i triangoli equilateri.
Ma essere convessi è una proprietà abbastanza eccezionale per un insieme!
Non si poteva escudere che tra tutte le figure che Pal non aveva considerato ce ne fosse una di area ancora più piccola con la proprietà richiesta da Kakeya.
Besicovitch, a partire dalla sua prima dimostrazione, provò che per ogni valore fissato dell'area (anche piccolissimo, purché maggiore di zero) si può costruire un insieme che risolve il problema di Kakeya.
Per avere un'idea della dimostrazione di Besicovitch potete guardare l'animazione nei computer a disposizione o accontentarvi di queste figure.

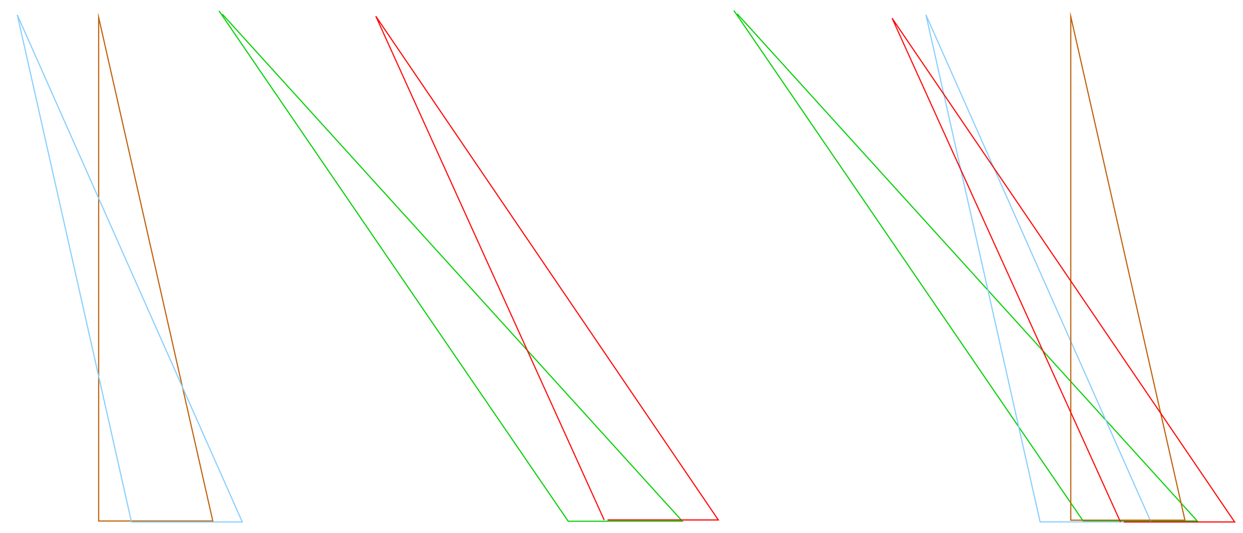
- Prendiamo un triangolo rettangolo isoscele con i lati congruenti lunghi uno. Questo è "un quarto" di un insieme di Kakeya nel piano, (Fig. 1);



- "affettiamo" il nostro triangolo in modo da ottenere tanti triangolini sottili, (Fig. 2);



- li sistemiamo in modo che si sovrappongano, (Fig. 3);



- se abbiamo tagliato e sovrapposto nel "modo giusto" otteniamo degli insiemi di Kakeya di area sempre più piccola.

Osservazione. Con una costruzione simile si può ottenere un insieme di misura nulla nel piano che contiene una circonferenza di raggio r per ogni valore $r \geq 0$.

Nel 1958 il problema di Kakeya è stato scelto dalla Mathematical Association of America come argomento del loro primo filmato divulgativo. Il film era narrato dalla voce dello stesso Besicovitch!