Функциональный анализ и его приложения,
1990, т. 24, вып. 4, 25—30

УДК 513

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СИЛЬНО ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

Б. А. Дубровин

Интегрируемость одномерных систем гидродинамического типа (СГТ)

$$u_t^i = \sum_j v_j^i(u)\, u_x^j, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

обеспечивается, как было указано С. П. Новиковым [1], их диагонализуемостью, т. е. приводимостью заменами u-координат матрицы $(v_j^i(u))$ к диагональной форме, и гамильтоновостью:

$$u_t^i = \{u^i(x), \hat{H}\}, \quad \hat{H} = \int H(u)\, dx, \tag{2}$$

скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$ имеют вид [2]

$$\{u^i(x),\ u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\, \delta'(x-y) - g^{is}\Gamma_{sk}^j u_x^k \delta(x-y). \tag{3}$$

Здесь матрица (g^{ij}) (предполагаемая невырожденной) задает псевдориманову метрику (с верхними индексами) нулевой кривизны на u-пространстве, $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(u)$ — соответствующая связность Леви — Чивита. Таким образом, условия интегрируемости формулируются в терминах дифференциальной геометрии СГТ. Для таких интегрируемых систем С. П. Царевым [3] было найдено обобщение (при $N \geqslant 3$) метода годографа, позволяющее «линеаризовать» систему и тем самым в некотором смысле ее «проинтегрировать».

Более точно, пусть система (1) в координатах $u^1, \ldots, u^N$ уже диагональна:

$$u_t^i = v_i(u)\, u_x^i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

причем $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$. Тогда метрика (g^{ij}) в (3) также диагональна в этих координатах. Значит, $u^1, \ldots, u^N$ — ортогональная криволинейная система координат в N-мерном евклидовом или псевдоевклидовом пространстве. Любая такая система координат порождает семейство коммутирующих гамильтоновых потоков вида (4)

$$u_s^i = \{u^i(x),\ \hat{P}\} = w_i(u)\, u_x^i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5}$$

$$\hat{P} = \int P(u)\, dx. \tag{6}$$

Эти потоки ищутся из линейной системы

$$\partial_i w_j = \Gamma_{ji}^j (w_i - w_j), \quad i \neq j, \quad \partial_i = \partial/\partial u^i, \tag{7}$$

а их гамильтонианы (определяющие семейство законов сохранения для систем (4), (5)) — из линейной системы

$$\partial_i \partial_j P - \Gamma_{ji}^j \partial_j P - \Gamma_{ij}^i \partial_i P = 0, \quad i \neq j. \tag{8}$$

Каждый коммутирующий с (4) поток (5) задает решение системы (4) в неявном виде:

$$w_i(u) = v_i(u)\, t + x, \quad i = 1, \ldots, N, \quad u = u(x, t). \tag{9}$$

Локально так получаются все решения. Определены также полугамильтоновы диагональные СГТ (их больше, чем гамильтоновых), к которым применим обобщенный метод годографа. Все эти результаты принадлежат Цареву [3] (см. также [4]).

Для важного класса интегрируемых СГТ — так называемых усредненных систем теории солитонов, описывающих гидродинамику слабых деформаций солитонных решеток [4],— линейная система (7), как показал И. М. Кричевер [5], обладает «повышенной интегрируемостью» и может быть решена методами алгебраической геометрии. Некоторые другие примеры СГТ, для которых можно эффективно найти коммутирующие потоки, указаны в [6].

Как выделить класс «сильно интегрируемых» гамильтоновых СГТ в рамках их дифференциальной геометрии? В настоящей заметке мы предлагаем решение (быть может, одно из возможных) этой задачи.

1. Пусть

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i h_i^2 (u)\, du^{i^2}, \quad N \geqslant 3, \tag{10}$$

— диагональная (псевдо-) риманова метрика, числа $\varepsilon_i = \pm 1$ определяют ее сигнатуру. Величины

$$\gamma_{ij} = \partial_j h_i / h_j, \quad i \neq j, \tag{11}$$

называются *коэффициентами вращения* метрики (10) [7]. Мы скажем, что (10) — *метрика егоровского типа* (ср. [7, 8]), если для нее выполняются следующие соотношения:

$$\gamma_{ji} = \varepsilon_i \varepsilon_j \gamma_{ij}. \tag{12}$$

Римановы метрики указанного вида возникали в теории ортогональных криволинейных систем координат у ряда геометров XIX в. Дарбу предложил называть их егоровскими в честь Д. Ф. Егорова, давшего наиболее законченное изложение [8] теории таких метрик.

Утверждение 1 (ср. [8]). *Метрика егоровского типа имеет нулевую кривизну, если и только если*

$$\partial_k \gamma_{ij} = \gamma_{ik} \gamma_{kj}, \quad i, j, k \text{ различны}, \tag{13}$$

$$\partial \gamma_{ij} = 0 \tag{14}$$

для всех $i \neq j$, *где* $\partial = \sum_{i=1}^{N} \partial_i$.

Замечание. Егоровские метрики являются *потенциальными*, т. е. представляются в виде

$$g_{ii}(u) = \partial_i V(u), \tag{15}$$

где $V(u)$ — некоторая функция (потенциал). Обратно, из равенства нулю кривизны и потенциальности вытекает егоровость. Еще одно равносильное определение егоровских метрик: это диагональные метрики нулевой кривизны, инвариантные относительно однопараметрической группы преобразований, действующих нетождественно вдоль каждой оси. Симметрия (12) отвечает такому выбору координат $u^1, \ldots, u^N$, при котором действие указанной группы записывается в виде

$$u^i \mapsto u^i + \tau, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Утверждение 2 (ср. [9]). *Коммутирующие потоки* (5) *и законы сохранения* (6), *отвечающие егоровской метрике нулевой кривизны, могут быть найдены из следующих линейных систем*:

$$\partial_j \psi_i = \gamma_{ij} \psi_j, \quad j \neq i, \quad \text{где} \quad \psi_i = h_i w_i, \tag{16}$$

$$\partial_j \varphi_i = \varphi_j \gamma_{ji}, \quad j \neq i, \quad \text{где } \partial_i P = h_i \varphi_i. \tag{17}$$

Оба утверждения проверяются легким вычислением.

Отметим, что сами коэффициенты Ламе $h_i = \psi_i$ ищутся из системы (16).

З а м е ч а н и е 1. Если кривизна егоровской метрики ненулевая, но выполнено (13), то операция (3) не задает скобку Пуассона. Тем не менее система (16) задает семейство коммутирующих диагональных потоков (5), которые будут полугамильтоновыми системами [9], а система (17) — семейство их общих законов сохранения. Фактически, такие полугамильтоновы системы изучались в [10] (хотя автор этой работы, по-видимому, не был знаком с работой Царева [9]). Симметрия (12) для полугамильтоновости несущественна.

З а м е ч а н и е 2. Если егоровская метрика удовлетворяет более сильному, чем (14), условию

$$\partial h_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{18}$$

то соответствие между законами сохранения и коммутирующими гамильтоновыми потоками приобретает особенно простой вид

$$u^i_s = \{u^i(x), \hat{P}\} = g^{ii}\partial_i \partial P u^i_x; \quad i = 1, \ldots, N, \tag{19}$$

где плотность P закона сохранения $\hat{P}$ удовлетворяет (17). Поэтому соответствующие решения (9) исходной системы (4) ищутся из следующих «уравнений огибающих»:

$$\partial_i (\partial P(u) - t\partial H(u) - x\partial I(u)) = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{20}$$

где H — плотность гамильтониана системы (4), $I(u)$ — плотность импульса (генератора трансляций по отношению к скобке (3)). (Между прочим, функция $V(u) = \partial I(u)$ является в этом случае потенциалом (15) метрики g_{ii}.)

2. Основным нашим наблюдением является тот факт, что система уравнений (13), (14) для коэффициентов вращения егоровских метрик нулевой кривизны есть интегрируемая система теории солитонов (она была приведена, например, в [11]), а (12) — редукционное соотношение для этой системы. Эта система, фактически, сводится к следующей $(1 + 1)$-мерной: ограничение величин $\gamma_{ij}(u)$ на любую плоскость $u^i = a^i x + b^i t$ удовлетворяет системе уравнений задачи N-волн [12] (где обычно заменяют $x, t \mapsto ix, it$)

$$[A, \Gamma_t] - [B, \Gamma_x] = [[A, \Gamma], [B, \Gamma]], \tag{21}$$

$$A = \operatorname{diag}(a^1, \ldots, a^N), \quad B = \operatorname{diag}(b^1, \ldots, b^N), \quad \Gamma = (\gamma_{ij})$$

с дополнительной редукцией

$$\operatorname{Im} \Gamma = 0, \quad \Gamma^T = J\Gamma J, \quad J = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N). \tag{22}$$

Система (13), (14) представляется в виде условий совместности линейных уравнений

$$\partial_j \psi_i = \gamma_{ij}\psi_j, \quad j \neq i, \tag{23}$$

$$\partial \psi_i = \lambda \psi_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{23'}$$

(λ — спектральный параметр). Первое из этих уравнений совпадает с (16). Система (17) для законов сохранения является сопряженной к (23). Система (13) также интегрируема (даже без условия симметрии (12)). Она получается многомеризацией по Захарову — Шабату уравнений (13), (14).

Основываясь на этих наблюдениях, дадим следующее

О п р е д е л е н и е. Диагональная гамильтонова СГТ называется *сильно интегрируемой*, если обслуживающая ее гамильтонову структуру метрика (10) является метрикой егоровского типа.

В силу сказанного выше ясно, что в теории сильно интегрируемых СГТ могут быть применены мощные методы теории солитонов, такие, как метод задачи Римана (применительно к системе (12) — (14) см. [12]), алгеброгеометрический метод (для системы (12) — (14) см. [13 — 15]) и др.

Пример. Пусть метрика (10) егоровского типа нулевой кривизны обладает свойством автомодельности

$$g_{ii}(ku) = k^{-2s} g_{ii}(u), \quad k > 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{24}$$

Покажем, что такие метрики определяются (при фиксированном s) заданием конечного числа параметров (равного $N^2(N+1)/2$). Действительно, коэффициенты вращения γ_{ij} таких метрик задают автомодельное решение системы (12)—(14)

$$\gamma_{ij}(ku) = k^{-1}\gamma_{ij}(u). \tag{25}$$

Для построения таких решений (в секторе $u^1 < \ldots < u^N$; в других секторах аналогично) используем метод задачи Римана.

Утверждение 3. *Пусть* $u^1 < u^2 < \ldots < u^N$. *Пусть* $\Psi(u, \lambda) = (\Psi_{ij}(u, \lambda))$ — $(N \times N)$*-матричнозначная аналитическая по* λ *при* $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ *функция, являющаяся решением следующей задачи Римана*:

$$\Psi(u, i\rho + 0) = \Psi(u, i\rho - 0)\, G, \tag{26}$$
$$\Psi(u, -i\rho + 0) = \Psi(u, -i\rho - 0)\, JG^T J,$$

$\rho > 0$, G — *постоянная нижне-треугольная комплексная матрица с единицами на главной диагонали, удовлетворяющая соотношению*

$$\bar{G}G = E \tag{27}$$

(*черта обозначает комплексное сопряжение*, E — *единичная матрица*), *нормированная асимптотикой вида*

$$\Psi(u, \lambda) \exp(-\lambda U) = E + \Gamma/\lambda + o(\lambda^{-1}), \quad \lambda \to \infty, \quad U = \operatorname{diag}(u^1, \ldots, u^N). \tag{28}$$

Тогда матрица $\Gamma = (\gamma_{ij})$, *определенная равенством* (28), *вещественна и удовлетворяет системе* (12)—(14). *Метрика* g_{ii} *с условием* (24) *восстанавливается через решение задачи Римана с помощью преобразования типа Меллина*

$$h_i(u) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N} c_j \int_{-i\infty}^{i\infty} \lambda^{s-1} \Psi_{ij}(u, \lambda)\, d\lambda, \quad g_{ii} = \varepsilon_i h_i^2, \tag{29}$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — *произвольные вещественные константы. Так получаются все метрики егоровского типа нулевой кривизны, удовлетворяющие* (24).

Доказательство этого утверждения получается по аналогии с [16].

Отметим, что все автомодельные решения соответствующих сильно интегрируемых СГТ с любым показателем автомодельности также могут быть построены (и изучены) с помощью формул утверждения 3: если для исходной системы (4)

$$v_i(ku) = k^{-p} v_i(u), \tag{30}$$

то ее автомодельные решения с показателем автомодельности γ,

$$u^i(x, t) = t^{\gamma p - 1} U_i(x t^{-1-\gamma}), \tag{31}$$

имеют вид

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{-i\infty}^{i\infty} (a_j \lambda^{q-1} - t b_j \lambda^{r-1} - x c_j \lambda^{s-1})\, \Psi_{ij}(u, \lambda)\, d\lambda = 0, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{32}$$

где

$$r = s + p, \quad q = s + p(1 + \gamma)/\gamma, \tag{33}$$

вещественные константы $b_1, \ldots, b_N$ определяются по системе (4), (30) аналогично (29), вещественные константы $a_1, \ldots, a_N$ произвольны. О применениях автомодельных решений СГТ см. [12, 4].

З а м е ч а н и е. При $N = 3$ и $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (+, -, +)$ автомодельные решения системы (12)—(14) находятся из системы

$$\begin{aligned} (zp_1)' &= -p_2p_3, \\ p_2' &= -p_3p_1, \\ ((z-1)\,p_3)' &= p_1p_2, \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{23} &= p_1(z)/(u^3 - u^1), \quad \gamma_{31} = -p_2(z)/(u^3 - u^1), \\ \gamma_{12} &= p_3(z)/(u^3 - u^1), \quad z = (u^2 - u^3)/(u^1 - u^3). \end{aligned} \tag{35}$$

Порядок этой системы понижается до двух с помощью интеграла

$$(zp_1)^2 - p_2^2 + [(z-1)\,p_3]^2 = R^2. \tag{36}$$

Полученная система второго порядка, как показано в [17], сводится к шестому уравнению Пенлеве (PVI) с параметрами, зависящими от R.

В частности, гамильтонов формализм уравнений Уизема (см. [4]), описывающих гидродинамику слабых деформаций кноидальных волн для уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ), получающийся усреднением (согласно [2]) скобки Гарднера — Захарова — Фаддеева, в диагональных переменных $u^1 < u^2 < u^3$ (римановы инварианты для уравнений Уизема) описывается метрикой (10) егоровского типа сигнатуры $(+, -, +)$, удовлетворяющей (18), (24) с $s = 0$ (см. [9]). Она имеет вид

$$\begin{aligned} h_1 &= f(z)/\sqrt{2(1-z)}, \quad h_2 = (f(z) + z - 1)/\sqrt{2z(1-z)}, \\ h_3 &= (f - 1)/\sqrt{2z}, \end{aligned} \tag{37}$$

где величина z как в (35), а функция f выражается через полные эллиптические интегралы

$$f(z) = \mathsf{E}(\sqrt{z})/\mathsf{K}(\sqrt{z}). \tag{38}$$

Соответствующее решение системы (34) имеет вид

$$p_1 = -h_1/z\sqrt{2}, \quad p_2 = -h_2/\sqrt{2}, \quad p_3 = -h_3/(z-1)\sqrt{2} \tag{39}$$

и удовлетворяет (36) с $R = 1/2$. Формулы (39) определяют решение уравнения PVI в силу [17], которое может быть извлечено из [18]. В этом случае решение задачи Римана (26)—(28) может быть построено с помощью результатов Кричевера [5]. Некоторые частные решения уравнений (23) с $\lambda = 0$ построены в [9] также с использованием свойства егоровости метрики (37).

3. Усредненное по n-зонным решениям уравнение КдФ при $n > 1$ также является сильно интегрируемым в нашем смысле. Диагональными переменными $u^1 < u^2 < \ldots < u^{2n+1}$ (обозначаемыми в [4] через $r_1, \ldots, r_{2n+1}$) являются точки ветвления соответствующей римановой поверхности рода n (вид системы в этих переменных см., например, в [4]).

У т в е р ж д е н и е 4. *Диагональная в переменных $u^1, \ldots, u^{2n+1}$ метрика, задающая усредненную по n-зонным решениям КдФ скобку Гарднера — Захарова — Фаддеева, является егоровской метрикой нулевой кривизны сигнатуры* $(+, -, +, \ldots, -, +)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для указанной метрики нетрудно получить

$$g_{ii} = \operatorname*{Res}_{\lambda = u^i}\left[\frac{dp}{d\lambda}\right]^2 d\lambda, \quad i = 1, \ldots, 2n+1. \tag{40}$$

Здесь $p = p(\lambda;\ u^1, \ldots, u^{2n+1})$ — «квазиимпульс», т. е. абелев интеграл второго рода на двулистной римановой поверхности с точками ветвления

$\lambda = u^1, \ldots, \lambda = u^{2n+1}$, имеющий единственный полюс в точке $\lambda = \infty$ с главной частью

$$p = \sqrt{\lambda} - u^0/2\sqrt{\lambda} + O(\lambda^{-3/2}) \tag{41}$$

и вещественные периоды по всем циклам (этими условиями функция $p(\lambda; u^1, \ldots, u^{2n+1})$ определяется однозначно; в частности, $u^0 = u^0(u^1, \ldots$ $\ldots, u^{2n+1})$). Из (40) следует, что метрика $\sum g_{ii} du^{i^2}$ имеет указанную сигнатуру и потенциальна:

$$g_{ii} = \partial_i u^0. \tag{42}$$

Она имеет нулевую кривизну в силу [2]. Поэтому она егоровская.

По-видимому, сильная интегрируемость и автомодельность систем, полученных усреднением уравнений теории солитонов, должна возникать в результате «усреднения» групп симметрий (типа преобразований Галилея и масштабных преобразований) исходных уравнений. Если эта гипотеза справедлива, то такие усредненные системы обладают универсальностью в силу утверждения 3 (выше), т. е. образуют соответствующее конечнопараметрическое семейство. Мы проанализируем этот вопрос в следующей работе.

Автор благодарит А. В. Китаева, указавшего на работу [17].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков С. П.* Геометрия консервативных систем гидродинамического типа. Метод усреднения для теоретико-полевых систем // УМН.— 1985.— Т. 40, вып. 4.— С. 79—89.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова — Уизема // ДАН СССР.— 1983.— Т. 270, № 4.— С. 781—785.
3. *Царев С. П.* О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа // ДАН СССР.— 1985.— Т. 282, № 3.— С. 534—537.
4. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // УМН.— 1989.— Т. 44, вып. 6.— С. 29—98.
5. *Кричевер И. М.* Метод усреднения для двумерных «интегрируемых» уравнений // Функцион. анализ и его прил.— 1988.— Т. 22, № 3.— С. 37—52.
6. *Павлов М. В.* Гамильтонов формализм слабонелинейных уравнений гидродинамики // Теорет. и мат. физика.— 1987.— Т. 71, № 3.— С. 351—356.
7. *Darboux G.* Leçons sur les systemes ortogonaux et les coordonnees curvilignes.— Paris, 1897.
8. *Егоров Д. Ф.* Об одном классе ортогональных систем // Уч. зап. Моск. ун-та. Отд. физ.-мат.— 1901.— Т. 18.— С. 1—239.
9. *Царев С. П.* Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1990.
10. *Serre D.* Systemes hyperboliques riches de lois de conservations.— Preprint / Ecole Norm. Super de Lyon.— 1988.— № 74.
11. *Дубровин Б. А.* Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия // Функцион. анализ и его прил.— 1977.— Т. 11, № 4.— С. 28—41.
12. Теория солитонов: метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.
13. *Дубровин Б. А.* Матричные конечнозонные операторы // Современные проблемы математики.— Т. 23.— С. 33—78.— М.: ВИНИТИ, 1983.
14. *Дубровин Б. А.* Теория операторов и вещественная алгебраическая геометрия // Глобальный анализ и математическая физика.— Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987.— С. 42—59.
15. *Живков А.* Геометрия инвариантных многообразий волчка в поле квадратичного потенциала // Изв. АН СССР. Сер. матем.— 1990.— № 4.
16. *Кричевер И. М.* Автомодельные решения уравнений типа Кортевега — де Фриза // Функцион. анализ и его прил.— 1980.— Т. 14, вып. 3.— С. 83—84.
17. *Fokas A. S., Leo R. A., Martina L., Soliani G.* // Phys. Lett. A.— 1986.— V. 115A, № 7.— P. 329—332.
18. *Лукашевич Н. А., Яблонский А. И.* Об одном классе решений шестого уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения.— 1967.— Т. 3, № 3.— С. 520—523.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
4 мая 1990 г.