Функциональный анализ и его приложения,
1982, т. 16, вып. 1, 27—43.

УДК 517.9

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ДВУХЗОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ SINE-GORDON

Б. А. Дубровин, С. М. Натанзон

Введение

Цель настоящей работы — перечислить все гладкие вещественные решения уравнения sine-Gordon $u_{xy} = \sin u$, выражающиеся через тэта-функции двух переменных. Своим появлением эта работа обязана С. П. Новикову, который обратил внимание авторов на серьезную незавершенность исследований [1], [2] по «конечнозонному интегрированию» этого важного в геометрических и физических приложениях (см. [3]) нелинейного уравнения. (Как сообщил авторам С. П. Новиков, близкие к работе [1] результаты были также получены Маккином в работе [14].) Главной проблемой оставалось нахождение эффективных условий вещественности строящихся «конечнозонных решений». Эта задача полностью решена в настоящей работе [1].

Построенные гладкие вещественные решения уравнений sine-Gordon выражаются через тэта-функции вещественных гиперэллиптических кривых (см. ниже §§ 1—3). Особо важен случай кривых рода 2 (и соответствующих тэта-функций двух переменных), так как здесь любая тэта-функция (общего положения) отвечает некоторой римановой поверхности. Применяя метод, развитый одним из авторов (см. [4], [5]), можно исключить римановы поверхности из вычислений и выразить все величины, входящие в формулы двухзонных решений, только через тэта-функции. Благодаря этому указанные формулы приобретают особую простоту и аналитическую эффективность (см. ниже § 4).

§ 1. Описание общих комплексных алгебро-геометрических («конечнозонных») решений уравнения sine-Gordon [2]

Пусть Γ — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g, аффинная часть которой задается в $\mathbf{C}^2$ уравнением

$$w^2 = P_{2g+1}(z) = \prod_{i=1}^{2g+1} (z - z_i); \tag{1.1}$$

величины $z_1, \ldots, z_{2g+1}$ попарно различны. Голоморфные дифференциалы

---

[1] Впервые дискуссия по этому вопросу с участием С. П. Новикова, Ю. Трубовица и И. В. Чередника возникла на Советско-американском симпозиуме по теории солитонов (Киев, 1979). Проведенный позднее анализ результатов работ [1], [2] окончательно выявил постановку задач, решаемых в нашей работе.

[2] Цель этого параграфа — вывести кратчайшим путем формулы (комплексных) решений через тэта-функции. Поэтому мы оставляем в стороне ряд глубоких идей (L — A-пары, функции Бейкера — Ахиезера и т. д., см. [3], [5], [8]), составляющих основу метода алгебро-геометрического интегрирования (или «конечнозонного интегрирования») нелинейных уравнений.

на этой поверхности имеют вид

$$\eta_k = \frac{z^{k-1}\,dz}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}}, \qquad k = 1, \ldots, g. \tag{1.2}$$

Выберем базис циклов $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ на Γ с матрицей индексов пересечений $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ему соответствует нормированный базис голоморфных дифференциалов $\omega_1, \ldots, \omega_g$, где

$$\omega_j = \sum_{k=1}^{g} c_{jk}\eta_k, \qquad j = 1, \ldots, g; \tag{1.3}$$

условие нормировки имеет вид

$$\oint_{a_k} \omega_j = \delta_{jk}. \tag{1.4}$$

Матрица (c_{jk}) вычисляется так:

$$(c_{jk}) = \Big(\oint_{a_j} \eta_k\Big)^{-1}. \tag{1.5}$$

Определим *матрицу периодов* (B_{jk}) римановой поверхности Γ:

$$B_{jk} = \oint_{b_k} \omega_j, \qquad j, k = 1, \ldots, g. \tag{1.6}$$

Хорошо известно (см. [9]), что (B_{jk}) — симметрическая матрица с положительно определенной мнимой частью, т. е. (B_{jk}) — матрица Римана. Определим в пространстве $\mathbf{C}^g = \mathbf{R}^{2g}$ целочисленную решетку периодов, составленную из векторов вида

$$M + BN, \qquad M, N \in \mathbf{Z}^g. \tag{1.7}$$

Фактор пространства $\mathbf{C}^g$ по этой решетке является $2g$-мерным тором и называется многообразием Якоби (или якобианом) поверхности Γ; обозначим его через $J(\Gamma)$.

По матрице периодов $B = (B_{jk})$ построим тэта-функцию с характеристиками $[\alpha] = [\alpha'; \alpha''] \in \mathbf{R}^{2g}$:

$$\theta[\alpha';\alpha''](z) \equiv \theta[\alpha';\alpha''](z \mid B) = \\ = \sum_{k \in \mathbf{Z}^g} \exp\{\pi i \langle B(k+\alpha'), k+\alpha'\rangle + 2\pi i \langle k+\alpha', z+\alpha''\rangle\}. \tag{1.8}$$

Здесь $z = (z_1, \ldots, z_g) \in \mathbf{C}^g$; суммирование ведется по целочисленной решетке $\mathbf{Z}^g$; угловые скобки обозначают евклидово скалярное произведение. Особо важна функция $\theta(z) = \theta[0; 0](z)$. Характеристики, для которых все координаты вектора $[\alpha]$ равны 0 или $^1/_2$, называются полупериодами. Полупериод $[\alpha'; \alpha'']$ четный, если $4\langle\alpha', \alpha''\rangle \equiv 0 \pmod 2$, и нечетный в противном случае. Четным полупериодам отвечают четные тэта-функции, нечетным — нечетные. При сдвиге на векторы решетки периодов (1.7) тэта-функции преобразуются по закону

$$\theta[\alpha';\alpha''](z + M + BN) = \\ = \exp\{-\pi i\langle BN, N\rangle - 2\pi i\langle N, z\rangle + 2\pi i(\langle\alpha', M\rangle - \langle\alpha'', N\rangle)\}\,\theta[\alpha';\alpha''](z). \tag{1.9}$$

Для построения решений уравнения sine-Gordon используем следующее тождество (см. [10, формула (39)]; это тождество может быть также выведено в рамках теории нелинейных уравнений, см. [5]), справедливое для любой римановой поверхности Γ и любой пары ее точек P, Q:

$$\frac{\theta(z+\Delta)\,\theta(z-\Delta)}{\varepsilon^2(P,Q)\,\theta^2(z)}=\alpha+\sum_{i,j}U_iV_j\frac{\partial^2\ln\theta(z)}{\partial z_i\,\partial z_j}. \tag{1.10}$$

Здесь $z\in\mathbf{C}^g$ — произвольный вектор,

$$\Delta=\left(\int_Q^P\omega_1,\ \ldots,\ \int_Q^P\omega_g\right), \tag{1.11}$$

векторы $U=(U_1,\ldots,U_g)$, $V=(V_1,\ldots,V_g)$ имеют вид

$$U_i=\frac{\omega_i(P)}{dp},\qquad V_i=\frac{\omega_i(Q)}{dq}, \tag{1.12}$$

где p, q — локальные параметры в окрестностях точек P, Q соответственно;

$$\varepsilon^2(P,Q)=\frac{\theta^2[\nu](\Delta)}{\sum U_i\dfrac{\partial\theta[\nu](0)}{\partial z_i}\sum V_j\dfrac{\partial\theta[\nu](0)}{\partial z_j}}, \tag{1.13}$$

где $[\nu]$ — любой нечетный невырожденный (т. е. $\operatorname{grad}\theta[\nu](0)\neq 0$) полупериод; явный вид величины $\alpha=\alpha(P,Q)$ для нас несуществен. Тождество (1.10) — обобщение «теоремы сложения» для σ-функций Вейерштрасса

$$\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\,\sigma^2(v)}=\wp(v)-\wp(u) \tag{1.14}$$

(см. [11]).

Лемма 1. *Пусть P и Q — точки ветвления римановой поверхности* (1.1). *Тогда вектор Δ вида* (1.11) *есть полупериод,*

$$\Delta=\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}BN,\qquad M,N\in\mathbf{Z}^g. \tag{1.15}$$

Доказательство. Пусть l — путь, соединяющий точки Q и P. Рассмотрим второй экземпляр $\tilde l$ этого пути, идущий из P в Q на другом листе римановой поверхности. Имеем

$$\Delta_j=\int_l\omega_j=\int_{\tilde l}\omega_j,\qquad j=1,\ldots,g. \tag{1.16}$$

Но интегралы от $\omega_1,\ldots,\omega_g$ по замкнутому циклу $\gamma=l\cup\tilde l$ дают некоторый вектор решетки периодов вида $M+BN$. В силу (1.16) это доказывает утверждение леммы.

Будем в дальнейшем считать, что локальные параметры $p=c_1\sqrt{z-z_i}$, $q=c_2\sqrt{z-z_j}$ (c_1, c_2 — константы) в окрестностях этих точек ветвления $P=\{z=z_i\}$, $Q=\{z=z_j\}$ согласованы так, что $\varepsilon^2(P,Q)=1$.

Теорема 1. *Функция*

$$u(x,y)=\frac{1}{i}\left[\ln\frac{\theta(xU+yV+\Delta+\zeta)\,\theta(xU+yV+\zeta-\Delta)}{\theta^2(xU+yV+\zeta)}+\pi i\langle N,\Delta\rangle\right] \tag{1.17}$$

является при перечисленных выше условиях решением уравнения

$$u_{xy}=-4\varkappa\sin u, \tag{1.18}$$

где

$$\varkappa=\exp(-\pi i\langle N,\Delta\rangle). \tag{1.18$'$}$$

Доказательство заключается в прямой подстановке с использованием соотношения (1.10) и закона преобразования (1.9).

Определение. Решения вида (1.17) уравнения (1.18), построенные по гиперэллиптической римановой поверхности Γ рода g и ее паре точек ветвления P, Q, будем называть g-зонными решениями уравнения sine-Gordon.

§ 2. Вещественные алгебраические кривые рода 2 и их тэта-функции

Пусть уравнение (1.1) римановой поверхности Γ имеет вещественные коэффициенты. Тогда на Γ действует антиинволюция (антиголоморфный автоморфизм)

$$\tau(z, w) = (\bar{z}, \bar{w}), \qquad \tau^2 = 1. \tag{2.1}$$

Топологические свойства такой «пары» — риманова поверхность (1.1) вместе с заданной на ней антиинволюцией (2.1) — определяются в гиперэллиптическом случае количеством вещественных корней полинома $P_{2g+1}(z)$ (см. уравнение (1.1)). Разберем сначала основной для нас пример поверхностей рода 2

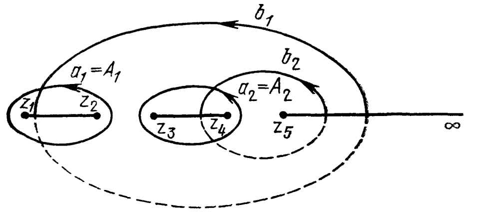

Рис. 1. Базис циклов на римановой поверхности типа I. Штриховыми линиями изображены части циклов, лежащие на «нижнем» листе римановой поверхности.

$$w^2 = P_5(z) = \prod_{i=1}^{5}(z - z_i). \tag{2.2}$$

Тип I. Все корни $z_1 < \ldots < z_5$ полинома $P_5(z)$ вещественны. В этом случае антиинволюция τ имеет на поверхности (2.2) три неподвижных овала (три вещественные компоненты кривой (2.2)):

$$\begin{aligned} A_1&: \{z_1 \leqslant z \leqslant z_2,\ w = \pm\sqrt{P_5(z)}\},\\ A_2&: \{z_3 \leqslant z \leqslant z_4,\ w = \pm\sqrt{P_5(z)}\},\\ A_3&: \{z_5 \leqslant z \leqslant \infty,\ w = \pm\sqrt{P_5(z)}\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Отметим, что объединение вещественных овалов разделяет риманову поверхность Γ на две непересекающиеся компоненты. Базис циклов на такой римановой поверхности изображен на рис. 1. Антиинволюция действует на эти циклы так:

$$\tau a_1 = a_1, \quad \tau a_2 = a_2, \quad \tau b_1 = -b_1, \quad \tau b_2 = -b_2 \tag{2.4}$$

(равенство в группе гомологий $H_1(\Gamma; \mathbf{Z})$). Нормированные голоморфные дифференциалы

$$\omega_1 = \frac{c_{11} + c_{12}z}{\sqrt{P_5(z)}}\,dz, \qquad \omega_2 = \frac{c_{21} + c_{22}z}{\sqrt{P_5(z)}}\,dz \tag{2.5}$$

на Γ имеют поэтому вещественные коэффициенты. Другими словами, при действии антиинволюции τ эти дифференциалы преобразуются по закону (здесь $\tau^*[f(z)dz] = f(\tau(z))d\tau(z)$)

$$\tau^*\omega_k = \bar{\omega}_k, \qquad k = 1, 2. \tag{2.6}$$

Матрица периодов чисто мнима:

$$\bar{B}_{kj} = \oint_{b_k} \bar{\omega}_j = \oint_{b_k} \tau^*\omega_j = \oint_{\tau b_k} \omega_j = -B_{kj}. \tag{2.7}$$

Следовательно, решетка периодов (1.7) в $\mathbf{C}^2 = \mathbf{R}^4$ инвариантна относительно комплексного сопряжения

$$(z_1, z_2) \mapsto (\bar z_1, \bar z_2). \tag{2.8}$$

Тем самым определена антиинволюция на якобиане J (Г). Найдем ее вещественные

$$\bar z \equiv z \tag{2.9}$$

и мнимые

$$\bar z \equiv -z \tag{2.10}$$

компоненты на якобиане J (Г). (Знак $\equiv$ здесь и далее будет использоваться для обозначения равенства векторов из $\mathbf{C}^g$ по модулю решетки периодов.) Для нахождения этих компонент разложим любой вектор $z = (z_1, z_2)$ по базису решетки периодов:

$$z = (z_1, z_2) \equiv B\alpha + \beta, \tag{2.11}$$

где у вещественных векторов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ все координаты лежат между нулем и единицей. Тогда условие вещественности имеет вид

$$B\alpha + \beta = -B\alpha + \beta + m + Bn, \tag{2.12}$$

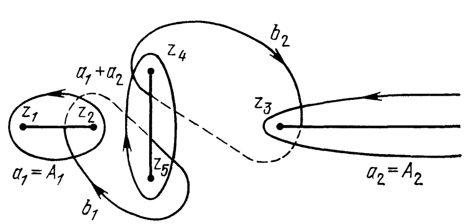

Рис. 2. Циклы на римановой поверхности типа II.

где $m, n \in \mathbf{Z}^2$. Получаем четыре вещественные компоненты (вещественных двумерных тора)

$$z \equiv \beta + (1/2)\, Bn, \tag{2.13}$$

где $\beta \in \mathbf{R}^2$, $n = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$. Аналогично, мнимые компоненты имеют вид

$$z \equiv i\alpha + (1/2)\, n, \tag{2.14}$$

где снова $\alpha \in \mathbf{R}^2$, вектор n принимает те же четыре значения. Это снова четыре двумерных вещественных тора.

Тип II. Корни $z_1 < z_2 < z_3$ вещественны, а $z_4 = \bar z_5$ комплексны. Антиинволюция τ имеет только два неподвижных овала

$$A_1 : \{z_1 \leqslant z \leqslant z_2,\quad w = \pm\sqrt{P_5(z)}\},\quad A_2 : \{z_3 \leqslant z \leqslant \infty,\quad w = \pm\sqrt{P_5(z)}\}, \tag{2.15}$$

причем их объединение уже не разделяет риманову поверхность Г на две компоненты. Базис циклов изображен на рис. 2. Действие антиинволюции τ на эти циклы таково:

$$\tau a_1 = a_1,\quad \tau a_2 = a_2,\quad \tau b_1 = a_1 + a_2 - b_1,\quad \tau b_2 = a_1 + a_2 - b_2. \tag{2.16}$$

Закон преобразования голоморфных дифференциалов снова имеет вид (2.6). Но для матрицы периодов B справедливо следующее соотношение, вытекающее из (2.6) и (2.16):

$$\bar B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - B. \tag{2.17}$$

По-прежнему решетка периодов в $\mathbf{C}^2$ инвариантна относительно комплексного сопряжения $(z_1, z_2) \mapsto (\bar z_1, \bar z_2)$, что определяет антиинволюцию на якобиане J (Г). Но эта антиинволюция имеет только две вещественные и две мнимые компоненты на J (Г), каждая из которых есть двумерный тор. Вещественные компоненты имеют вид

$$z \equiv \beta + \frac{1}{2} Bn; \quad \beta \in \mathbf{R}^2, \quad n = (0, 0), (1, 1). \tag{2.18}$$

Мнимые компоненты имеют вид

$$z \equiv i\alpha + \frac{1}{2} n, \quad \alpha \in \mathbf{R}^2, \quad n = (0, 0), (1, 0). \tag{2.19}$$

Тип III. Корень z_5 вещественный, а остальные — комплексные: $z_1 = \bar{z}_2$, $z_3 = \bar{z}_4$. Вещественный овал только один:

$$A_1 : \{z_5 \leqslant z \leqslant \infty, \ w = \pm\sqrt{P_5(z)}\}; \tag{2.20}$$

он не разделяет риманову поверхность Г. Базис циклов изображен на рис. 3. Действие антиинволюции на эти циклы таково:

$$\begin{aligned} \tau a_1 &= a_1, \quad \tau a_2 = a_2, \\ \tau b_1 &= a_1 + a_2 - b_1, \\ \tau b_2 &= a_1 + 2a_2 - b_2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

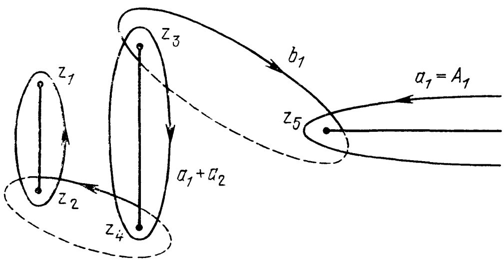

Рис. 3. Циклы на римановой поверхности типа III.

Голоморфные дифференциалы удовлетворяют (2.6); для матрицы периодов B справедливо соотношение

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - B. \tag{2.22}$$

Антиинволюция на якобиане J (Г) имеет одну вещественную

$$z \equiv \beta, \quad \beta \in \mathbf{R}^2, \tag{2.23}$$

и одну мнимую

$$z \equiv i\alpha, \quad \alpha \in \mathbf{R}^2, \tag{2.24}$$

компоненту (каждая из них — двумерный тор).

Вещественные алгебраические кривые рода 2, не относящиеся к типам I—III, имеют вид $w^2 = P_6(z)$, где $P_6(z)$ — многочлен с невещественными нулями. Такие кривые или не имеют вещественных точек (тип IV), или имеют ровно один разделяющий овал (тип V). Эти кривые не годятся для интегрирования уравнения sine-Gordon, и мы их рассматривать не будем. Отметим лишь, что подходящий базис циклов a_1, a_2, b_1, b_2 на таких римановых поверхностях преобразуется под действием антиинволюции по закону

$$\tau a_1 = a_2, \quad \tau a_2 = a_1, \quad \tau b_1 = -b_2, \quad \tau b_2 = -b_1. \tag{2.25}$$

Якобиан J (Г) с антиинволюцией $(z_1, z_2) \mapsto (\bar{z}_2, \bar{z}_1)$ имеет одну вещественную и одну мнимую компоненту.

Выясним теперь вопрос о симметрии тэта-функций римановых поверхностей типов I—III.

Лемма 2. *Тэта-функции римановых поверхностей типов* I—III *с указанным выше базисом циклов обладают следующей симметрией*:

$$\overline{\theta(z)} = \theta(\bar{z} + \lambda), \tag{2.26}$$

где λ *— вещественный полупериод вида* $\lambda = 0$ *для типа* I, $\lambda = (1/2, 1/2)$ *для типа* II, $\lambda = (1/2, 0)$ *для типа* III.

Доказательство немедленно следует из определения функции $\theta(z)$ и симметрий (2.7), (2.17) и (2.22) для матриц периодов перечисленных римановых поверхностей.

В заключение этого параграфа приведем некоторые общие сведения о римановых поверхностях рода $g \geqslant 2$ с антиинволюцией τ. Пусть антиинволюция τ имеет на Γ n неподвижных овалов ($0 \leqslant n \leqslant g+1$). Возможны два случая: а) объединение вещественных овалов разделяет Γ на две компоненты; б) объединение овалов не разделяет Γ. Свойства «разделяющих» римановых поверхностей (случай а)) и их тэта-функций хорошо изучены; см., например, [10, гл. 6]. Тэта-функции неразделяющих поверхностей не возникали в приложениях (насколько известно авторам). Мы приведем здесь поэтому информацию о тэта-функциях неразделяющих римановых поверхностей. На такой поверхности всегда можно выбрать базис циклов $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ с матрицей пересечений $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, преобразующийся под действием антиинволюции по закону

$$\tau a_i = a_i, \quad i = 1, \ldots, g, \qquad \tau b_i = \begin{cases} a - b_i, & 1 \leqslant i \leqslant n, \\ a + a_i - b_i, & n+1 \leqslant i \leqslant g, \end{cases} \tag{2.27}$$

где $a = \sum_{i=1}^{g} a_i$ (см. [6]). Для $g = 2$ такой базис был предъявлен для типов II ($n = 2$) и III ($n = 1$). Матрица периодов голоморфных дифференциалов, вычисленная в этом базисе, обладает следующей симметрией:

$$\bar{B} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & & \ldots & 1 & 1 & & \ldots & 1 \\ \hline 1 & & \ldots & 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ . & & & . & 1 & 2 & \ldots & 1 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & & \ldots & 1 & 1 & & \ldots & 2 \end{array}\right) - B, \tag{2.28}$$

где в правой части квадратные блоки имеют размеры $n \times n$ и $(g-n) \times (g-n)$. Тэта-функция $\theta(z) = \theta(z \mid B)$ обладает симметрией

$$\overline{\theta(z)} = \theta(\bar{z} + \lambda), \tag{2.29}$$

где полупериод λ имеет вид

$$\lambda = (1/2)(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \tag{2.30}$$

(единицы на первых n местах). Легко проверить, что антиинволюция $z \mapsto \bar{z}$ на якобиане $J(\Gamma)$ имеет 2^{n-1} попарно непересекающихся вещественных компонент и 2^{n-1} мнимых компонент при $n > 0$, каждая из которых представляет собой вещественный g-мерный тор. При $n = 0$ компонента одна, если g четно, и две, если g нечетно. Функция $\theta(z)$ вещественна на вещественных торах вида

$$\begin{aligned} &z \equiv i\alpha + \frac{1}{2}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{2}\lambda, \qquad \alpha \in \mathbf{R}^g, \quad n > 0; \\ &z \equiv i\alpha \quad \text{при} \quad n = 0, \quad g = 2p+1; \\ &z \equiv i\alpha + \frac{1}{2}(\varepsilon_1, 0, \ldots, 0) \quad \text{при} \quad n = 0, \quad g = 2p, \end{aligned} \tag{2.31}$$

где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ принимают значения 0, 1. (Легко видеть, что условие вещественности функции $\theta(z)$ зависит только от класса вектора z по модулю решетки периодов.) Отметим, что на всех этих вещественных торах функция $\theta(z)$ имеет нули (см. добавление ниже), поэтому неразделяющие римановы поверхности, как правило, не могут быть использованы для построения гладких «конечнозонных» решений нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи [3]. Однако уравнение sine-Gordon является исключением из этого правила: в следующем параграфе мы покажем, что любая вещественная гиперэллиптическая кривая хотя бы с одной вещественной точкой ветвления дает гладкое вещественное решение уравнения sine-Gordon. За исключением простейшего случая, где все точки ветвления вещественные, такие римановы поверхности всегда неразделяющие.

§ 3. Отбор вещественных решений уравнения sine-Gordon

В этом параграфе мы докажем, что для вещественности и гладкости построенных в § 1 конечнозонных решений уравнения sine-Gordon необходимо и достаточно выполнения следующих условий на риманову поверхность Γ вида (1.1) и ее точки ветвления P, Q:

1) гиперэллиптическая кривая (1.1) должна быть вещественной (т. е. римановой поверхностью с антиинволюцией);

2) точки ветвления P, Q должны лежать на одном вещественном овале кривой (1.1).

Для случая рода 2 поверхность Γ должна быть одного из типов I — III, перечисленных в предыдущем параграфе. Кроме того, нужно еще наложить ограничение на параметр ζ, определяющий решение (см. (1.17)); мы это сделаем чуть ниже. Условие на точки ветвления P, Q означает, что Δ — вещественный вектор в $\mathbf{C}^g$,

$$\Delta = \frac{1}{2} M, \qquad M \in \mathbf{Z}^g. \tag{3.1}$$

Для определенности можно считать, что точки P, Q лежат на цикле a_1. Тогда $M = (1, 0, \ldots, 0)$. Поэтому формулы (1.17), (1.18) упростятся и мы получим: функция

$$u(x, y) = \frac{1}{i} \ln \left[\frac{\theta\left(xU + yV - \frac{1}{2} M + \zeta\right)}{\theta(xU + yV + \zeta)} \right]^2 \tag{3.2}$$

является решением уравнения

$$u_{xy} = -4 \sin u. \tag{3.3}$$

Делая замену $x, y \mapsto ix/2, iy/2$, можно привести это уравнение к стандартному виду $u_{xy} = \sin u$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{\theta^2\left(z - \frac{1}{2} M\right)}{\theta^2(z)}. \tag{3.4}$$

В силу закона преобразования (1.9) это — однозначная (мероморфная функция на торе $J(\Gamma)$. Наложим теперь ограничение на вектор ζ:

$$\bar{\zeta} \equiv -\frac{1}{2} M + \lambda - \zeta, \tag{3.5}$$

где $\lambda = 0$ для типа I, $\lambda = (1/2, 1/2)$ для типа II, и $\lambda = (1/2, 0)$ для типа III. Ясно, что такие векторы ζ находятся во взаимно однозначном соответствии с мнимыми точками якобиана:

$$\zeta = -\frac{1}{4} M + \frac{1}{2} \lambda + z, \quad \text{где} \quad \bar{z} \equiv -z. \tag{3.6}$$

[3] Используя развитую здесь технику, один из авторов (Дубровин) показал, что нелинейное уравнение Шредингера $i\psi_t = \psi_{xx} - |\psi|^2\psi$ (случай отталкивания) не имеет гладких конечнозонных решений.

Лемма 3. *Равенство* $|\varphi(\zeta)|^2 = 1$ *справедливо, если и только если выполняется соотношение* (3.5).

Доказательство. Пусть для вектора ζ выполняется (3.5). Тогда

$$\overline{\varphi(\zeta)} = \overline{\left[\frac{\theta^2\left(\zeta - \frac{1}{2}M\right)}{\theta^2(\zeta)}\right]} = \frac{\theta^2\left(\bar{\zeta} - \frac{1}{2}M + \lambda\right)}{\theta^2(\bar{\zeta} + \lambda)} = \frac{1}{\varphi(\zeta)}. \tag{3.7}$$

Обратно, если $\varphi(\zeta)\overline{\varphi(\zeta)} = 1$, то в силу (3.7)

$$\bar{\zeta} + \lambda = \pm\left(\zeta - \frac{1}{2}M\right). \tag{3.8}$$

Знак плюс в этом равенстве невозможен, поскольку вектор $\bar{\zeta} - \zeta$ чисто мнимый, а вектор $\lambda + (1/2)M$ вещественный. Лемма доказана.

Выберем локальные параметры p, q в окрестностях точек ветвления P, Q так, чтобы $\tau(p) = \bar{p}$, $\tau(q) = \bar{q}$. Тогда векторы U, V вещественны: $\bar{U} = U$, $\bar{V} = V$. Это очевидно из их определения (1.12) и вида голоморфных дифференциалов (2.6). Поэтому выполнение условия (3.5) для вектора ζ влечет за собой выполнение соотношения

$$\bar{\xi} = -\frac{1}{2}M + \lambda - \xi$$

для ректора

$$\xi = \frac{1}{2}ixU + \frac{1}{2}iyV - \frac{1}{2}M + \zeta \tag{3.9}$$

при вещественных x, y.

Теорема 2. *Функция*

$$u(x, y) = \frac{1}{i}\ln\left[\frac{\theta\left(\frac{ix}{2}U + \frac{iy}{2}V - \frac{1}{4}M + \frac{1}{2}\lambda + z\right)}{\theta\left(\frac{ix}{2}U + \frac{iy}{2}V + \frac{1}{4}M + \frac{1}{2}\lambda + z\right)}\right]^2 \tag{3.10}$$

является гладким вещественным решением уравнения sine-Gordon $u_{xy} = \sin u$ *при перечисленных выше условиях на риманову поверхность* Γ, *ее точки ветвления* P, Q *и локальные параметры* p, q, *причем вектор* z *должен лежать на какой-нибудь мнимой компоненте якобиана* $J(\Gamma)$. *Если риманова поверхность* Γ *имеет только одну пару вещественных точек ветвления, то имеется еще одна компонента гладких вещественных решений уравнения* $u_{xy} = \sin u$ *вида*

$$u(x, y) = \frac{1}{i}\ln\left[\frac{\theta\left(\frac{x}{2}U - \frac{y}{2}V + \left(\frac{1}{2}, 0\right) + z\right)}{\theta\left(\frac{x}{2}U - \frac{y}{2}V + z\right)}\right]^2, \tag{3.11}$$

где вектор z *чисто вещественный. Перечисленные формулы исчерпывают все гладкие вещественные конечнозонные решения уравнения* $u_{xy} = \sin u$.

Доказательство для рода $g = 2$. Гладкость и вещественность решений (3.10) сразу вытекает из леммы 3. Гладкость и вещественность решений вида (3.11) проверяется так же, как и в лемме 3. Дадим доказательство необходимости условий вещественности, перечисленных в теореме. Необходимость вещественности кривой Γ и ее точек ветвления P, Q вытекает из теории L—A-пар и фактически доказана в [1]. Необходимость условия $\zeta + \bar{\zeta} \equiv \Delta + \lambda$ вытекает из леммы 3. Это равенство имеет на $J(\Gamma)$ нетривиальные решения, если и только если вектор Δ вещественный. Это означает, что точки P и Q лежат на одном овале антиинволюции τ. Это однозначно фиксирует антиинволюцию на римановой поверхности для типов I и II; для типа III годится также и другая антиинволюция τ', где $\tau'(z, w) = (\bar{z}, -\bar{w})$. Это в точности приводит к перечисленным выше формулам и только к ним. Теорема доказана.

Доказательство этой теоремы для случая бо́льшего рода проводится практически без изменений.

Эта теорема позволяет легко подсчитать количество компонент гладких вещественных решений уравнения sine-Gordon, строящихся по вещественной гиперэллиптической поверхности Γ рода g с фиксированной парой вещественных точек ветвления, лежащих на одном овале, причем у Γ имеется n вещественных овалов $(1 \leqslant n \leqslant g+1)$. Нужно лишь исключить «тривиальные» компоненты, для которых решения отличаются лишь знаком. Получаем 2^{n-2} компонент вещественных решений при $n \geqslant 2$ и две компоненты при $n = 1$. Полный список гладких вещественных решений для рода $g = 2$ приведен в следующем параграфе. Причина появления двух компонент для кривых с одним овалом ясна из доказательства теоремы 2: фактически эти две компоненты отвечают двум разным вещественным кривым $w^2 = P_5(z)$ и $w^2 = -P_5(z)$, изоморфным как комплексные римановы поверхности.

Прежде чем переходить к эффективизации формул в роде 2, упомянем о проблеме плотности построенных конечнозонных решений уравнения sine-Gordon в пространстве всех периодических (по модулю 2π) решений этого уравнения. Как указал авторам С. П. Новиков, пока подходы к этой проблеме отсутствуют. Это связано, в частности, с несамосопряженностью соответствующей L—A-пары (см. [3]).

§ 4. Эффективизация полученных формул двухзонных решений уравнения sine-Gordon

В этом параграфе мы покажем, что из конструкции двухзонных решений можно вовсе выкинуть риманову поверхность, и получим в замкнутом виде формулы вещественных гладких решений через тэта-функции двух переменных. Принципиальная возможность реализации такой программы ясна заранее, поскольку любая 2×2-матрица Римана $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}$ (т. е. симметрическая с положительно определенной мнимой частью) общего положения является матрицей периодов некоторой римановой поверхности (см., например, [5, гл. 4]).

Введем необходимые обозначения. Рассмотрим четыре линейно независимые функции

$$\hat{\theta}[n](z) = \theta\left[\frac{n}{2} : 0\right](z \mid 2B), \tag{4.1}$$

где $n \in (\mathbf{Z}_2)^2$, т. е. координаты вектора $n = (n_1, n_2)$ равны 0 или 1. Справедливо следующее тождество («теорема сложения» для тэта-функций, см. [5]):

$$\theta(z+u)\,\theta(z-u) = \sum_{n \in (\mathbf{Z}_2)^2} \hat{\theta}[n](2z)\,\hat{\theta}[n](2u). \tag{4.2}$$

Значения функций $\hat{\theta}[n](z)$ и их производных в нуле называются тэта-константами. Тэта-константы являются функциями от матрицы Римана B. Условимся опускать нулевой аргумент у тэта-констант: $\hat{\theta}[n] \equiv \hat{\theta}[n](0)$, $\hat{\theta}_{ij}[n] \equiv \hat{\theta}_{ij}[n](0)$. Наложим на 2×2-матрицу Римана

B следующее *условие невырожденности*:

$$D = \det \begin{vmatrix} \hat{\theta}_{11}[0,0] & \hat{\theta}_{12}[0,0] & \hat{\theta}_{22}[0,0] & \hat{\theta}[0,0] \\ \hat{\theta}_{11}[1,0] & \hat{\theta}_{12}[1,0] & \hat{\theta}_{22}[1,0] & \hat{\theta}[1,0] \\ \hat{\theta}_{11}[0,1] & \hat{\theta}_{12}[0,1] & \hat{\theta}_{22}[0,1] & \hat{\theta}[0,1] \\ \hat{\theta}_{11}[1,1] & \hat{\theta}_{12}[1,1] & \hat{\theta}_{22}[1,1] & \hat{\theta}[1,1] \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.3}$$

(это условие отбрасывает матрицы Римана, приводящиеся целочисленным симплектическим преобразованием к диагональной форме).

Теорема 3. *Пусть* $B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}$ — *произвольная матрица Римана с условием невырожденности* (4.3), *удовлетворяющая одному из трех условий вещественности*:

$$\text{Тип I:} \quad \bar{B} = -B, \tag{4.4}$$

$$\text{Тип II:} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - B, \tag{4.5}$$

$$\text{Тип III:} \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - B. \tag{4.6}$$

Тогда функция

$$u(x, y) = \frac{1}{i} \ln \left[\frac{\theta[0, 0; p_1, p_2]\left(\frac{i(x-x_0)}{2} U + \frac{i(y-y_0)}{2} V\right)}{\theta[0, 0; q_1, q_2]\left(\frac{i(x-x_0)}{2} U + \frac{i(y-y_0)}{2} V\right)} \right]^2 \tag{4.7}$$

является гладким вещественным решением уравнения $u_{xy} = \sin u$, *где характеристики* p_1, p_2, q_1, q_2 *для типов* I—III *имеют вид*

	Тип I		Тип II	Тип III
p_1	$^3/_4$	$^3/_4$	0	0
p_2	0	$^1/_2$	$^1/_4$	0
q_1	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_2$	$^1/_2$
q_2	0	$^1/_2$	$^1/_4$	0

, (4.8)

векторы $U = (U_1, U_2,)$, $V = (V_1, V_2)$ *имеют вид*

$$U_1 = 1, \quad U_2 = \frac{q_{12} + \sqrt{q_{12}^2 - 4q_{11}q_{22}}}{2q_{11}}, \quad V_1 = q_{11}, \quad V_2 = \frac{q_{12} - \sqrt{q_{12}^2 - 4q_{11}q_{22}}}{2}, \tag{4.9}$$

а величины $q_{ij} = q_{ij}(B)$ *вычисляются по следующим формулам* (*детерминант* D *определен равенством* (4.3)):

$$q_{11} = D^{-1} \det \begin{vmatrix} \hat{\theta}[0,0] & \hat{\theta}_{12}[0,0] & \hat{\theta}_{22}[0,0] & 0 \\ 0 & \hat{\theta}_{12}[1,0] & \hat{\theta}_{22}[1,0] & \hat{\theta}[1,0] \\ \hat{\theta}[0,1] & \hat{\theta}_{12}[0,1] & \hat{\theta}_{22}[0,1] & 0 \\ 0 & \hat{\theta}_{12}[1,1] & \hat{\theta}_{22}[1,1] & \hat{\theta}[1,1] \end{vmatrix}, \tag{4.10}$$

$$q_{12} = D^{-1} \det \begin{vmatrix} \hat{\theta}_{11}[0,0] & \hat{\theta}[0,0] & \hat{\theta}_{22}[0,0] & 0 \\ \hat{\theta}_{11}[1,0] & 0 & \hat{\theta}_{22}[1,0] & \hat{\theta}[1,0] \\ \hat{\theta}_{11}[0,1] & \hat{\theta}[0,1] & \hat{\theta}_{22}[0,1] & 0 \\ \hat{\theta}_{11}[1,1] & 0 & \hat{\theta}_{22}[1,1] & \hat{\theta}[1,1] \end{vmatrix}, \tag{4.11}$$

$$q_{22}=D^{-1}\det\begin{vmatrix}\hat\theta_{11}[0,0] & \hat\theta_{12}[0,0] & \hat\theta[0,0] & 0\\ \hat\theta_{11}[1,0] & \hat\theta_{12}[1,0] & 0 & \hat\theta[1,0]\\ \hat\theta_{11}[0,1] & \hat\theta_{12}[0,1] & \hat\theta[0,1] & 0\\ \hat\theta_{11}[1,1] & \hat\theta_{12}[1,1] & 0 & \hat\theta[1,1]\end{vmatrix}. \qquad (4.12)$$

Для матриц Римана типа III *есть еще одно семейство вещественных решений вида*

$$u(x,y)=\frac{1}{i}\ln\left[\frac{\theta\left[0,0;\frac{1}{2},0\right]\left(\frac{x-x_0}{2}U-\frac{y-y_0}{2}V\right)}{\theta\left(\frac{x-x_0}{2}U-\frac{y-y_0}{2}V\right)}\right]^2. \qquad (4.13)$$

Доказательство. Возьмем сначала произвольную матрицу Римана (без условий вещественности), построим по ней соответствующую функцию $\theta(z)=\theta(z\mid B)$ и будем искать решения уравнения (1.18) в виде (1.17), где ζ — произвольный вектор, Δ имеет вид

$$\Delta=\frac{1}{2}M+\frac{1}{2}BN,\qquad M,N\in\mathbf{Z}^g, \qquad (4.14)$$

а векторы U, V пока неизвестны. Для отыскания этих векторов воспользуемся соотношением (1.10). При условии $\varepsilon^2=1$ имеем

$$\theta(z+\Delta)\theta(z-\Delta)=\alpha\theta^2(z)+\partial_U\partial_V\theta(z)\cdot\theta(z)-\partial_U\theta(z)\partial_V\theta(z). \qquad (4.15)$$

Преобразуем это равенство, используя теорему сложения (4.2) (ср. [5]). Получаем систему из 2^g соотношений

$$2\sum_{i,j}U_iV_j\hat\theta_{ij}[n]+\alpha\hat\theta[n]=\hat\theta[n](2\Delta),\qquad n\in(\mathbf{Z}_2)^g. \qquad (4.16)$$

При $g>2$ условия совместности этой системы дают набор нетривиальных соотношений на матрицу Римана B, необходимых (и, по-видимому, достаточных; см. [5]) для того, чтобы матрица B была матрицей периодов гиперэллиптической римановой поверхности. А для $g=2$ эти уравнения легко решаются. Возьмем в качестве Δ вектор $\Delta=(^1/_2,0)$. Тогда система (4.16) перепишется в виде

$$2U_1V_1\hat\theta_{11}[n]+2(U_1V_2+U_2V_1)\hat\theta_{12}[n]+2U_2V_2\hat\theta_{22}[n]+\alpha\hat\theta[n]=$$
$$=(-1)^{n_1}\hat\theta[n], \qquad (4.17)$$

где $n=(n_1,n_2)$ принимает значения (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1). Решая ее по правилу Крамера, получим

$$U_1V_1=q_{11},\quad U_1V_2+U_2V_1=q_{12},\quad U_2V_2=q_{22}, \qquad (4.18)$$

где величины q_{ij} имеют вид (4.10)—(4.12). Отсюда, очевидно, следуют формулы (4.9). Тем самым мы проверили, что перечисленные в теореме формулы дают решения уравнения sine-Gordon. Проверим, что эти решения гладкие и вещественные при условиях (4.4)—(4.6) на матрицу B. Для этого достаточно доказать вещественность векторов U и V, определенных формулами (4.9). Разобьем доказательство вещественности на ряд лемм.

Лемма 4. *Для матриц Римана B, удовлетворяющих одному из условий вещественности* (4.4)—(4.6), *величины $q_{ij}=q_{ij}(B)$, определенные формулами* (4.10)—(4.12), *вещественны.*

Доказательство. Для тэта-констант из условий (4.4)—(4.6) получаем такие соотношения:

$$\overline{\hat{\theta}[n]} = \exp(-2\pi i \langle n, \lambda\rangle^2)\hat{\theta}[n], \quad \overline{\hat{\theta}_{kj}[n]} = \exp(-2\pi i \langle n, \lambda\rangle^2)\hat{\theta}_{kj}[n], \tag{4.19}$$

где $\lambda = 0$, $(1/2, 1/2)$ или $(1/2, 0)$ для типов I, II, III соответственно. Для типа I получаем поэтому, что все тэта-константы вещественны. Для типов II, III тэта-константы $\hat{\theta}[0, 0]$, $\hat{\theta}[1, 0]$, $\hat{\theta}[0, 1]$, $\hat{\theta}[1,1]$ при комплексном сопряжении умножаются соответственно на $1, -i, -i, 1$ или на $1, -i, 1, -i$ (то же самое справедливо для констант $\hat{\theta}_{jk}[n]$). Во всех трех случаях отсюда вытекает вещественность величин q_{ij}. Лемма доказана.

В силу доказанной леммы достаточно проверить положительность дискриминанта

$$\delta = q_{12}^2 - 4q_{11}q_{22}. \tag{4.20}$$

Лемма 5. *Дискриминант $\delta = \delta(B)$ не обращается в нуль для любой матрицы Римана B, удовлетворяющей условию невырожденности* (4.3).

Доказательство. Заметим прежде всего, что векторы U, V определяются из системы (4.17) однозначно с точностью до перестановки и до преобразований $U \mapsto kU$, $V \mapsto k^{-1}V$. Далее, любая 2×2-матрица Римана с условием (4.3) определяет риманову поверхность Γ рода 2. Для этой римановой поверхности Γ и подходящей пары ее точек ветвления векторы U и V обязаны поэтому иметь вид (1.12). Хорошо известно, что эти векторы различны (см., например, [5]). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь детерминанты $\tilde{q}_{11}$, $\tilde{q}_{12}$, $\tilde{q}_{22}$, стоящие в числителях формул (4.10)—(4.12) (т. е. $q_{ij} = D^{-1}\tilde{q}_{ij}$). Они определены уже для всех матриц Римана B (без ограничения (4.3)). Покажем, что даже при обращении в нуль детерминанта D величина $\tilde{\delta} = \tilde{q}_{12}^2 - 4\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}$ может зануляться лишь на некоторых кривых в трехмерном пространстве матриц Римана. Действительно, зануление детерминанта D означает, что матрица Римана B имеет в некотором базисе решетки диагональный вид $B = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}$. Соответствующие тэта-функции двух переменных распадаются тогда в произведение двух одномерных тэта-функций. Поэтому $\tilde{q}_{11} = \tilde{q}_{22} \equiv 0$, $\tilde{q}_{12} \neq 0$ для почти всех τ_1, τ_2. Легко проверить, что при замене базиса решетки периодов, даваемой целочисленным симплектическим преобразованием, величина $\tilde{\delta}$ может лишь умножаться на ненулевой множитель. Значит, для почти всех матриц Римана, лежащих на уровне $D = 0$, величина $\tilde{\delta} \neq 0$.

Далее, если B — матрица периодов вещественной римановой поверхности типов I—III, то B удовлетворяет условиям вещественности (4.4)—(4.6) соответственно. Для такой матрицы Римана дискриминант δ положителен. Из предыдущих рассуждений вытекает, что δ не может менять знак. Это завершает доказательство теоремы.

§ 5. Заключительные замечания

1. Построенные выше по матрице Римана B двухзонные решения уравнения sine-Gordon таковы, что функция $\exp iu(x, y)$ почти периодична по x и y с парой периодов T_1^x, T_2^x и T_1^y, T_2^y соответственно. Эти периоды определены с точностью до преобразований Лоренца

$$T_i^x \leftrightarrow T_i^y, \qquad T_i^x \mapsto kT_i^x, \qquad T_i^y \mapsto k^{-1}T_i^y \tag{5.1}$$

и до преобразований вида

$$(T_i^{x,y})^{-1} \mapsto \sum_{j=1}^{2} m_{ij} (T_j^{x,y})^{-1}, \tag{5.2}$$

где (m_{ij}) — целочисленная унимодулярная матрица, порожденных заменой базиса решетки периодов. Явный вид этих периодов таков:

$$\begin{pmatrix} T_1^{x^{-1}} \\ T_2^{x^{-1}} \end{pmatrix} = i\tilde{B}^{-1}U, \qquad \begin{pmatrix} T_1^{y^{-1}} \\ T_2^{y^{-1}} \end{pmatrix} = i\tilde{B}^{-1}V, \tag{5.3}$$

где матрица $\tilde{B}$ имеет для типов I—III следующий вид:

$$\text{Тип I:} \quad \tilde{B} = B; \tag{5.4}$$

$$\text{Тип II:} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} - B_{12} & -1 + B_{11} + B_{12} \\ B_{12} - B_{22} & -1 + B_{12} + B_{22} \end{pmatrix}; \tag{5.5}$$

$$\text{Тип III:} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} -1 + 2B_{11} & -1 + 2B_{12} \\ -1 + 2B_{12} & -2 + 2B_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Периодические по x (или по y) решения выделяются условием соизмеримости

$$n_1 T_1^x + n_2 T_2^x = 0 \text{ или } n_1 T_1^y + n_2 T_2^y = 0, \tag{5.7}$$

где n_1, n_2— целые числа. Если все периоды по x и по t равны бесконечности, то построенные двухзонные решения переходят в двухсолитонные решения уравнения sine-Gordon (см. [3]).

2. Укажем в заключение семейство двухзонных решений, выражающихся через эллиптические функции. Возьмем такую матрицу Римана:

$$B = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \tau + \tilde{\tau} & \tau - \tilde{\tau} \\ \tau - \tilde{\tau} & \tau + \tilde{\tau} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Im} \tau > 0, \quad \operatorname{Im} \tilde{\tau} > 0, \tag{5.8}$$

где тип I: $\operatorname{Re} \tau = \operatorname{Re} \tilde{\tau} = 0$, тип II: $\operatorname{Re} \tau = 2$, $\operatorname{Re} \tilde{\tau} = 0$, тип III: $\operatorname{Re} \tau = \operatorname{Re} \tilde{\tau} = 1$ (такой вид имеют матрицы периодов римановых поверхностей вида $w^2 = P_3(z^2)$ [4]). Производя замену $t = x + y$, $\xi = x - y$, перепишем уравнение sine-Gordon в виде

$$u_{tt} - u_{\xi\xi} = \sin u. \tag{5.9}$$

Положим

$$\theta_2(z) = \theta \left[\frac{1}{2}; 0 \right] (z \mid \tau), \qquad \theta_3(z) = \theta(z \mid \tau) \tag{5.10}$$

(стандартные обозначения тэта-функций Якоби, см. [11]); аналогичный смысл имеют обозначения $\tilde{\theta}_2(z)$ и $\tilde{\theta}_3(z)$ (где $\tau \mapsto \tilde{\tau}$). Тогда решения уравнения (5.9), эллиптические по t и по ξ (разумеется, эллиптической функцией будет $\exp iu$), имеют вид

$$u(t, \xi) = \frac{1}{i} \ln \left[\frac{\theta_3(z)\tilde{\theta}_3(w) - \theta_2(z)\tilde{\theta}_2(w)}{\theta_3(z)\tilde{\theta}_3(w) + \theta_2(z)\tilde{\theta}_2(w)} \right]^2, \tag{5.11}$$

где

$$z = i\omega(t - t_0) + \frac{n_1 + n_2}{2}, \qquad w = i\varkappa(\xi - \xi_0) + \frac{n_1 - n_2}{2}, \tag{5.12}$$

[4] Было бы интересно исследовать свойства решений других нелинейных уравнений, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния, отвечающих римановым поверхностям с богатой симметрией. По поводу классификации таких поверхностей см. [7].

вектор (n_1, n_2) принимает значения (0, 0), (1, 0) для типа I и (1, 1) для типов II и III. «Дисперсионные соотношения» для волнового вектора $(\omega, \varkappa)$ имеют вид

$$\omega^2 [f_0''\tilde{f}_0 + f_2''\tilde{f}_2] - \varkappa^2 [f_0\tilde{f}_0'' + f_2\tilde{f}_2''] = \frac{1-\alpha}{8} (f_0\tilde{f}_0 + f_2\tilde{f}_2),$$

$$\omega^2 f_1''\tilde{f}_1 - \varkappa^2 f_1\tilde{f}_1'' = -\frac{1+\alpha}{8} f_1\tilde{f}_1,$$

$$\omega^2 [f_1''\tilde{f}_0 + f_0''\tilde{f}_1] - \varkappa^2 [f_1\tilde{f}_0'' + f_0\tilde{f}_1''] = \frac{1-\alpha}{8} (f_1\tilde{f}_0 + f_0\tilde{f}_1)$$

(величина α исключается из системы). Здесь введены функции $f_k(z) = \theta[k/4;\ 0](z|\,2\tau)$, $k = 0, 1, 2$; аналогичный смысл имеют функции $\tilde{f}_k(z)$ (где $\tau \mapsto \tilde{\tau}$). Как обычно, отсутствие аргумента у этих функций (или у их производных) означает, что этот аргумент равен нулю. Следует отметить, что в частном случае, где периоды по ξ бесконечные, решения типа (5.11) были найдены И. В. Грибковым [13] при помощи преобразования Бэклунда.

Добавление. О нулях тэта-функций вещественных неразделяющих кривых

Пусть Γ — риманова поверхность рода g с антиинволюцией τ, имеющей n неподвижных овалов $(0 \leqslant n \leqslant g)$, которые в совокупности не разделяют Γ. Пусть, далее, $\theta(z)$ — тэта-функция этой римановой поверхности, построенная по базису циклов вида (2.27). Она принимает вещественные значения на g-мерных торах вида (2.31).

Т е о р е м а. *На всех торах вида* (2.31) *функция* $\theta(z)$ *имеет нули.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Параметризуем точки якобиана $J(\Gamma)$ дивизорами D степени g:

$$z = \int_{gQ}^{D} \omega + K^Q. \qquad (\text{Д}.1)$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_g)$ — нормированные голоморфные дифференциалы, Q — фиксированная точка Γ, K^Q — соответствующий вектор римановых констант (см. [10]).

Л е м м а. *Вектор z вида* (Д.1) *удовлетворяет* (2.31), *если и только если найдется мероморфный дифференциал с нулями в $D + \tau(D)$ и полюсами в Q и $\tau(Q)$, т. е. $D + \tau(D) \sim K_\Gamma + Q + \tau(Q)$ (K_Γ — канонический класс).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (2.31) выполнено. Тогда искомый дифференциал $\Omega(P)$ имеет вид

$$\Omega(P) = \frac{\theta\left(\int_Q^P \omega - z\right) \theta\left(\int_{\tau(Q)}^P \omega + z\right)}{\varepsilon(P, Q)\,\varepsilon(P, \tau(Q))}\, dp \qquad (\text{Д}.2)$$

(p — локальный параметр в точке P, величина $\varepsilon(P, Q)$ имеет вид (1.13); ср. [10, гл. 2]). Нули числителя расположены в точках дивизоров D (первый сомножитель) и $\tau(D)$ (второй сомножитель в силу (2.29)). Далее, (Д.2) есть общий вид дифференциалов с полюсами в Q и $\tau(Q)$; отсюда и из (2.29) вытекает, что $z + \bar{z} \equiv \lambda$. Лемма доказана.

Отметим, что $\theta(z) = 0$, если и только если дифференциал $\Omega(P)$ вида (Д.2) голоморфный. Дивизор D в этом случае содержит точку Q.

Проверим теперь утверждение теоремы для гиперэллиптических кривых $w^2 + P_{2g+2}(z) = 0$, где $P_{2g+2}(z)$ — многочлен степени $2g+2$ с вещественными коэффициентами. На такой кривой есть пара антиинволюций τ, τ', где $\tau(z, w) = (\bar{z}, \bar{w})$, $\tau'(z, w) = (\bar{z}, -\bar{w})$, а также инволюция $\gamma(z, w) = (z, -w)$. Пусть антиинволюция τ неразделяющая. Возьмем $Q = \{z = \infty\}$; тогда $\tau' Q = Q$. Дифференциалы $\Omega(P)$, фигурирующие в лемме, имеют вид

$$\Omega(P) = \frac{R_g(z)\,dz}{\sqrt{P_{2g+2}(z)}}, \qquad (Д.3)$$

где многочлен $R_g(z)$ степени g имеет вещественные коэффициенты. Его нули симметричны относительно γ. Итак, интересующие нас точки якобиана (вида (2.31)) параметризуются дивизорами D такими, что $D + \tau(D)$ инвариантен относительно γ. Дивизоры D, удовлетворяющие этому условию, имеют вид

$$D = \sum P_i + \sum (P'_i + \tau' P'_i) + \sum (P''_i + \gamma P''_i),$$

где $\tau' P_i = P_i$. Обозначим через $A'_1, \ldots, A'_m$ все овалы инволюции τ', не содержащие Q. Здесь $m = n - 1$ при $n > 0$, $m = 0$ при $n = 0$ и $g = 2p$, $m = 1$ при $n = 0$ и $g = 2p + 1$. «Номер» $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ компоненты вида (2.31) определяется так: ε_k — количество точек по модулю 2 дивизора D, лежащих на овале A'_k. В каждой такой компоненте имеются дивизоры D, содержащие точку Q (напомним, что в этом случае дифференциал (Д.3) голоморфный). Тогда $\theta(z) = 0$, где z имеет вид (Д.1) (см. [10]).

Перейдем теперь к общему случаю римановой поверхности Γ с неразделяющей антиинволюцией τ. Каждая такая поверхность может быть получена деформацией из вещественной гиперэллиптической в классе вещественных кривых (см. [6]). Для гиперэллиптического случая мы нашли в каждой компоненте вида (2.31) дивизор D такой, что $D + \tau(D)$ есть дивизор голоморфного дифференциала $\Omega = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i \omega_i$. Этот дифференциал симметричен относительно τ: $\tau^* \Omega = \bar{\Omega}$, коэффициенты α_i вещественны. При непрерывной деформации базисные дифференциалы ω_i меняются непрерывно (см. [12, с. 99—103]). Тем самым голоморфный симметрический дифференциал Ω определен на всех кривых из деформации. Он и определяет нам нуль тэта-функции, лежащий на соответствующей компоненте. Теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Козел В. А.*, *Котляров В. П.* Конечнозонные решения уравнения sine-Gordon. Препринт ФТИНТ АН УССР, № 9—77, Харьков, 1977.
2. *Чередник И. В.* Об условиях вещественности в «конечнозонном интегрировании».— ДАН СССР, 1980, т. 252, № 5, с. 1104—1108.
3. Теория солитонов/Под ред. С. П. Новикова. М.: Наука, 1980.
4. *Дубровин Б. А.* О гипотезе С. П. Новикова в теории тэта-функций и нелинейных уравнений типа Кортевега — де Фриза и Кадомцева — Петвиашвили.— ДАН СССР, 1980, т. 251, № 3, с. 541—544.
5. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения.— УМН, 1981, т. 36, вып. 2, с. 11—80.
6. *Натанзон С. М.* Пространство модулей вещественных кривых.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1978, т. 37, 219—253.
7. *Натанзон С. М.* Геометрия Лобачевского и автоморфизмы комплексных кривых.— В сб.: Геометрические методы в задачах анализа и алгебры. Межвуз. темат. сб.. 1978, № 1, с. 130—151; 1980, № 2, с. 156—158. Ярославль: Изд-во ЯГУ.
8. *Кричевер И. М.* Аналог формулы Даламбера для уравнений главного кирального поля и уравнения sine-Gordon.— ДАН СССР, 1980, т. 253, № 2, с. 288—292.

9. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1960.
10. *Fay J.* Theta-functions on Riemann surface. Lecture Notes in Math. V. 352. Springer-Verlag, 1973.
11. *Бейтмен Г.*, *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 3. М.: Наука, 1967.
12. *Альфорс Л.*, *Берс Л.* Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения. М.: ИЛ, 1961.
13. *Грибков И. В.* Некоторые решения уравнения синус-Гордона, получаемые с помощью преобразования Бэклунда.— УМН, 1978, т. 33, вып. 2, с. 191—192.
14. *McKean H. P.* The sine-Gordon and sinh-Gordon equations on the circle.—Comm. Pure Appl. Math., 1981, v. 34, № 2, p. 197—257.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
10 июня 1981 г.