1981 г. март—апрель *т. 36. вып. 2 (218)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТЭТА-ФУНКЦИИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Б. А. Дубровин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В последние годы в связи с развитием методов точного решения нелинейных уравнений математической физики (метода обратной задачи; см. книгу [13] и литературу, цитированную в этой книге) выявилась роль различных теоретико-функциональных конструкций, связанных с римановыми поверхностями. В первую очередь это относится к теории многомерных тэта-функций, через которые могут быть выражены так называемые «решения ранга 1» широкого класса нелинейных уравнений (теория решений высшего ранга связана с голоморфными расслоениями над римановыми поверхностями и изложена в обзоре [14]; там же дана полная библиография). В настоящем обзоре изложены основные принципы применения тэта-функций к интегрированию уравнений вместе с важнейшими примерами такого применения.

Напомним вкратце историю этого вопроса. В 1974 г. в цикле работ С. П. Новикова, автора, В. Б. Матвеева и А. Р. Итса ([20], [53], [54], [60], [17]) и П. Лакса ([55]) был введен и изучен класс «конечнозонных» периодических и квазипериодических потенциалов оператора Шрёдингера (Штурма — Лиувилля, Хилла). На базе этого класса была сформулирована и реализована программа построения широкого класса решений уравнения Кортевега — де Фриза (КдФ). (Некоторые результаты этих исследований были получены также Маккином и Ван Мёрбеке в 1975 г. [56]. Как было строго доказано позднее (В. А. Марченко, И. В. Островский [57], Маккин и Трубовиц [58]), множество периодических конечнозонных потенциалов плотно в пространстве периодических функций с данным периодом.) В этих работах была установлена связь спектральной теории операторов с периодическими коэффициентами с алгебраической геометрией, теорией конечномерных вполне интегрируемых гамильтоновых систем и теорией нелинейных уравнений типа КдФ. Обобщение этой теории на пространственно двумерные («2 + 1»; x, y, t) системы, среди которых имеется важный двумерный аналог уравнения КдФ — уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП) — было осуществлено И. М. Кричевером [59], [15], [16]. Подход И. М. Кричевера дает также чрезвычайно методологически удобное и прозрачное изложение алгеброгеометрической процедуры построения упомянутых выше конечнозонных решений уравнения КдФ и его многочисленных аналогов. В случае (2 + 1)-систем этот метод вскрывает новые важные связи с алгебраической геометрией, которые существенно используются в постановке задач главы 4 данного обзора.

Как указали автору С. П. Новиков и С. М. Натанзон, отыскание условий отбора вещественных решений в различных задачах такого рода оказывается нетривиальной пока не решенной проблемой, исключая отдельные случаи, буквально аналогичные КдФ, к которым, однако, не относятся уравнения sin-gordon и нелинейное уравнение Шрёдингера с отталкивающим взаимодействием, а также все (2 + 1)-системы. Существенное продвижение здесь получено И. В. Чередником [49] и развито в [14]. Результаты [49] пока не претендуют на полноту и не эффективны даже в простейших случаях.

Первые две главы обзора посвящены важнейшим результатам теории тэта-функций, их связи с римановыми поверхностями и абелевыми многообразиями. Материал этих глав в основном восходит к классическим работам Абеля, Якоби, Римана (современное изложение см. в книгах [1] — [8]; в книге [4] можно найти подробную библиографию). В третьей главе изложен метод И. М. Кричевера (см. [15], [16]) построения точных решений нелинейных уравнений (в § 2 использованы также результаты работы [21]). Этот метод позволяет выразить построенные решения через тэта-функции. Основной инструмент для построения таких решений — так называемые функции Бейкера — Ахиезера, т. е. мероморфные функции на римановой поверхности с существенной особенностью заданного вида (см. [18], [19]; по-видимому, впервые функции такого типа рассматривались Клебшем и Горданом). Существенно отметить, что в применениях к нелинейным уравнениям возникают не произвольные тэта-функции, а лишь тэта-функции римановых поверхностей. С. П. Новиков выдвинул гипотезу, согласно которой тождества на тэта-функцию (или на определяющую ее матрицу Римана), получающиеся после ее элементарной подстановки в уравнение Кадомцева — Петвиашвили (КП), в точности выделяют из всех тэта-функций тэта-функции римановых поверхностей. Частичная реализация этой программы — вывод системы тождеств, связывающих параметры тэта-функции римановых поверхностей (без доказательства полноты этой системы) — была получена автором [23] [1]); соответствующие результаты изложены в главе 4. Попутно решена также поставленная С. П. Новиковым задача эффективизации формул для решения нелинейных уравнений в случае малых родов, где никаких ограничений на тэта-функцию еще не возникает. Кроме того, использование уравнения КП позволило дать явную конструкцию для восстановления алгебраической кривой по ее якобиану (т. е. дать новое доказательство классической теоремы Торелли, утверждающей единственность такого восстановления; см. [4]), причем эта конструкция не требует знания решений трансцендентного уравнения $\theta(z) = 0$. В самое последнее время автору удалось доказать гипотезу С. П. Новикова в ослабленном варианте: соотношения на тэта-функцию, вытекающие из уравнения КП, выделяют в пространстве всех тэта-функций многообразие тэта-функций римановых поверхностей с точностью до, возможно, лишних неприводимых компонент. Идея доказательства также приводится в главе 4. Таким образом, использование уравнения КП позволяет эффективно решить классическую проблему Римана о соотношениях между периодами голоморфных дифференциалов на римановых поверхностях. Наконец, в последней главе перечислены динамические системы, интегрируемые в тэта-функциях рода 2. За исключением уравнений теории двухзонных потенциалов, проинтегрированных в [20], [17], а также многомерных уравнений Эйлера, все эти системы — классические, хотя структура их решений не общеизвестна. Инвариантные многообразия этих систем — это абелевы многообразия рода 2. Это позволяет получать явные формулы разных типов для универсального расслоения абелевых многообразий рода 2 (впервые такие формулы были получены в работе [35]). В качестве приложения мы помещаем работу И. М. Кричевера, посвященную интегрированию неабелевой цепочки Тода алгебро-геометрическими методами.

Автор благодарит С. П. Новикова и И. М. Кричевера за интерес к работе и ряд полезных обсуждений. В процессе написания главы 4 автор консультировался с А. Н. Тюриным, которому выражает глубокую благодарность.

ГЛАВА 1

ТЭТА-ФУНКЦИИ. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

§ 1. Определение тэта-функций и их простейшие свойства

Определение 1.1.1. Симметрическая $g \times g$-матрица $B = (B_{jk})$ с отрицательно определенной вещественной частью $\operatorname{Re} B = (\operatorname{Re} B_{jk})$ называется *матрицей Римана.*

[1]) Формулировки некоторых результатов работы [23] были опубликованы (и использованы) в [37]. Кроме того, отметим, что после опубликования работы [23] автору был показан препринт Хироты [24]; методы этого препринта пересекаются с отдельными техническими соображениями работы [23]. При этом Хирота решает такую задачу: как с помощью теории тэта-функций строить точные решения нелинейных уравнений типа КдФ? До явных формул изложение в препринте [24] не доведено.

Определение 1.1.2. Тэта-функция Римана определяется своим рядом Фурье вида

$$\theta(z \mid B)=\sum_{N\in\mathbb{Z}^g}\exp\left\{\frac{1}{2}\langle BN,\, N\rangle+\langle N,\, z\rangle\right\}. \tag{1.1.1}$$

Здесь $z=(z_1,\ \ldots,\ z_g)\in\mathbb{C}^g$ — комплексный вектор. Угловые скобки $\langle\,,\rangle$ обозначают евклидово скалярное произведение: $\langle N,\, z\rangle=\sum_{i=1}^{g}N_iz_i$, $\langle BN, N\rangle=\sum_{i,\,j=1}^{g}B_{ij}N_iN_j$. Суммирование в формуле (1.1.1) ведется по решетке целочисленных векторов $N=(N_1,\ \ldots,\ N_g)$. Общий член этого ряда зависит только от симметричной части матрицы B. Из очевидной оценки $\mathrm{Re}\,\langle BN,\, N\rangle\leqslant\leqslant -b\langle N,\, N\rangle$, $b>0$ (в качестве $-b$ можно взять наибольшее собственное число матрицы $\mathrm{Re}\,B$), легко вытекает абсолютная сходимость ряда (1.1.1), равномерная на компактах. Таким образом, функция $\theta\,(z\mid B)$ — аналитическая во всем пространстве $\mathbb{C}^g$.

Замечание. Мы часто будем использовать сокращенное обозначение $\theta\,(z)=\theta(z\mid B)$, если матрица B фиксирована.

Пусть $e_1,\ \ldots,\ e_g$ — базисные векторы в пространстве $\mathbb{C}^g$ с координатами

$$(e_k)_j=\delta_{kj}; \tag{1.1.2}$$

введем еще векторы $f_1,\ \ldots,\ f_g$, полагая

$$(f_k)_j=B_{kj}\quad (k,\ j=1,\ \ldots,\ g). \tag{1.1.3}$$

Векторы f_k могут быть записаны также в виде

$$f_k=Be_k, \tag{1.1.3'}$$

где B — отвечающий матрице B_{kj} линейный оператор.

Утверждение 1.1.1. *При сдвиге аргумента на векторы $2\pi ie_k$, f_k θ-функция Римана преобразуется по закону*

$$\theta\,(z+2\pi ie_k)=\theta\,(z), \tag{1.1.4}$$

$$\theta\,(z+f_k)=\exp\left(-\frac{1}{2}\,B_{kk}-z_k\right)\theta\,(z). \tag{1.1.5}$$

Доказательство. Периодичность (1.1.4) очевидна: общий член ряда (1.1.1) при сдвиге $z\to z+2\pi ie_k$ не изменится. Для доказательства равенства (1.1.5) сделаем замену индекса суммирования N в (1.1.1), полагая $N=M-e_k$, $M\in\mathbb{Z}^g$. Будем иметь

$$\theta\,(z+f_k)=\sum_{N\in\mathbb{Z}^g}\exp\left\{\frac{1}{2}\langle BN,\, N\rangle+\langle N,\, z+f_k\rangle\right\}=$$

$$=\sum_{M\in\mathbb{Z}^g}\exp\left\{\frac{1}{2}\langle BM,\, M\rangle-\langle M,\, Be_k\rangle+\frac{1}{2}\langle Be_k,\, e_k\rangle+\right.$$

$$\left.+\langle M,\, z\rangle+\langle M,\, f_k\rangle-\langle e_k,\, z\rangle-\langle e_k,\, f_k\rangle\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\,B_{kk}-z_k\right\}\sum_{M\in\mathbb{Z}^g}\exp\left\{\frac{1}{2}\langle BM,\, M\rangle+\langle M,\, z\rangle\right\}=$$

$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\,B_{kk}-z_k\right\}\theta\,(z).$$

Утверждение доказано.

Итак, функция $\theta(z)$ является g-кратно периодической с базисом периодов $2\pi i e_1, \ldots, 2\pi i e_g$. Векторы $f_1, \ldots, f_g$ являются ее *квазипериодами*. Допуская вольность речи, мы будем называть всю систему векторов $(2\pi i e_k, f_l)$ периодами θ-функции. Любой вектор вида $2\pi i N + BM$, где $N, M \in \mathbb{Z}^g$ — целочисленные векторы, является периодом θ-функции Римана. Из утверждения 1.1.1 немедленно вытекает следующий закон преобразования:

$$(1.1.6)\qquad \theta(z+2\pi i N+BM)=\exp\left[-\frac{1}{2}\langle BM, M\rangle-\langle M, z\rangle\right\}\theta(z).$$

Векторы вида $2\pi i N + BM$ образуют *решетку периодов*.

Определим также θ-*функции с характеристиками*. Пусть α, β — любые вещественные g-мерные векторы. Введем функцию $\theta[\alpha, \beta](z)$ (или $\theta[\alpha, \beta](z \mid B)$ в случае, когда необходимо явно указать зависимость от матрицы B):

$$(1.1.7)\qquad \theta[\alpha, \beta](z)=\exp\left\{\frac{1}{2}\langle B\alpha, \alpha\rangle+\langle z+2\pi i\beta, \alpha\rangle\right\}\theta(z+2\pi i\beta+B\alpha).$$

При $\alpha = \beta = 0$ получаем θ-функцию Римана: $\theta[0, 0](z) \equiv \theta(z)$. Кроме того, из формулы (1.1.6) вытекает, что $\theta[N, M](z) \equiv \theta(z)$. Поэтому достаточно рассматривать функции $\theta[\alpha, \beta](z)$ с характеристиками α, β, удовлетворяющими условиям $0 \leqslant \alpha_i, \beta_j < 1$. Нетрудно указать разложение функции $\theta[\alpha, \beta](z)$ в ряд Фурье. Это разложение имеет вид

$$(1.1.8)\qquad \theta[\alpha, \beta](z)=\sum_{N\in\mathbb{Z}^g}\exp\left\{\frac{1}{2}\langle B(N+\alpha), N+\alpha\rangle+\langle z+2\pi i\beta, N+\alpha\rangle\right\}.$$

По аналогии с утверждением 1.1.1 получаем закон преобразования при сдвиге на период θ-функций с характеристиками. Опуская вычисления, приведем окончательную формулу

$$(1.1.9)\qquad \theta[\alpha, \beta](z+2\pi i N+BM)=$$
$$=\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle BM, M\rangle-\langle z, M\rangle+2\pi i(\langle\alpha, N\rangle-\langle\beta, M\rangle)\right\}\theta[\alpha, \beta](z).$$

Перемножая θ-функции типа (1.1.7), мы будем получать θ-*функции высших порядков*. Закон преобразования θ-функции n-го порядка с характеристиками $[\alpha, \beta]$ — обозначим ее через $\theta_n[\alpha, \beta](z)$ — при сдвиге на период таков:

$$(1.1.10)\qquad \theta_n[\alpha, \beta](z+2\pi i N+BM)=$$
$$=\exp\left\{-\frac{n}{2}\langle BM, M\rangle-n\langle M, z\rangle+2\pi i(\langle\alpha, N\rangle-\langle\beta, M\rangle)\right\}\theta_n[\alpha, \beta](z).$$

Легко показать (мы не будем здесь этого делать), что целые функции g переменных $z_1, \ldots, z_g$, подчиняющиеся закону преобразования (1.1.10), образуют линейное пространство размерности n^g. В качестве базисных θ-функций n-го порядка с характеристиками $[\alpha, \beta]$ можно взять, например, функции

$$(1.1.11)\qquad \theta\left[\frac{\alpha+\gamma}{n}, \beta\right](nz \mid nB),$$

где координаты вектора γ пробегают независимо все значения от 0 до $n-1$.

Определение 1.1.3. Характеристики $[\alpha, \beta]$, для которых все координаты α_i, β_j равны 0 или 1/2, называются *полупериодами*. Полупериод $[\alpha, \beta]$ называется *четным*, если $4\langle\alpha, \beta\rangle \equiv 0 \pmod 2$, и *нечетным* в противном случае.

Утверждение 1.1.2. *Функция $\theta[\alpha, \beta](z)$ — четная, если $[\alpha, \beta]$ — четный полупериод, и нечетная, если $[\alpha, \beta]$ — нечетный полупериод.*

Доказательство. При замене $z \to -z$, $N \mapsto -N - 2\alpha$ общий член ряда (1.1.8) умножится на

$$\exp\{-\langle M+\beta,\ 4\pi i\alpha\rangle\} = \exp\{4\pi i\langle\alpha,\beta\rangle\}.$$

Знак этого множителя как раз и определяется четностью числа $4\langle\alpha,\beta\rangle$. Утверждение доказано.

Нетрудно подсчитать, что имеется всего $2^{g-1}(2^g+1)$ четных полупериодов и $2^{g-1}(2^g-1)$ нечетных.

§ 2. Тэта-функции одного переменного

В классической теории эллиптических функций (случай $g = 1$) фигурируют лишь тэта-функции, отвечающие полупериодам. Матрица Римана здесь — это одно число $b = B_{11}$, $\operatorname{Re} b < 0$. Имеются 4 полупериода:

$$(1/2,\ 1/2),\ (1/2,\ 0),\ (0,\ 0),\ (0,\ 1/2). \tag{1.2.1}$$

Им отвечают 4 основные θ-функции:

$$\left\{\begin{aligned}
i\theta_1(z) &\equiv \theta\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right](z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left\{\frac{1}{2}b\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2k+1}{2}\right)(z+\pi i)\right\},\\
\theta_2(z) &\equiv \theta\left[\frac{1}{2},\ 0\right](z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left\{\frac{1}{2}b\left(\frac{2k+1}{2}\right)^2 + \frac{2k+1}{2}z\right\},\\
\theta_3(z) &\equiv \theta[0,\ 0](z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left\{\frac{1}{2}bk^2 + kz\right\},\\
\theta_4(z) &\equiv \theta\left[0,\ \frac{1}{2}\right](z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \exp\left\{\frac{1}{2}bk^2 + k(z+\pi i)\right\}.
\end{aligned}\right. \tag{1.2.2}$$

Для сопоставления со справочной литературой отметим, что более общеприняты такие обозначения:

$$b = 2\pi i\tau \quad (\operatorname{Im}\tau > 0), \qquad z = 2\pi i x.$$

Первый полупериод — нечетный, остальные — четные. Следовательно, функция $\theta_1(z)$ — нечетная, а остальные — четные. Функция $\theta_1(z)$ обращается в нуль во всех узлах решетки периодов $z = 2\pi i m + bn$. Отсюда нетрудно найти нули остальных θ-функций. В частности, функция $\theta_3(z)$ обращается в нуль в точках $z = \pi i + \frac{b}{2} + 2\pi i m + bn$. Покажем, что других нулей нет. Возьмем для удобства функцию θ_3. Нужно доказать, что

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C d\ln\theta_3(z) = 1, \tag{1.2.3}$$

где C — контур параллелограмма, натянутого на векторы $2\pi i$, b. Общие формулы преобразования (1.1.9) для функции $\theta_3(z)$ примут вид

$$\theta_3(z+2\pi i) = \theta_3(z), \quad \theta_3(z+b) = \exp\left(-\frac{b}{2} - z\right)\theta_3(z). \tag{1.2.4}$$

Интеграл (1.2.3) разобьем на два:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C d\ln\theta_3(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi i}[d\ln\theta_3(z) - d\ln\theta_3(z+b)] + {}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_0^b [d\ln\theta_3(z+2\pi i) - d\ln\theta_3(z)].$$

Из соотношений (1.2.4) следует, что второй интеграл есть нуль, а первый имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi i} dz = 1,$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Об абелевых торах

Утверждение 1.3.1. *Векторы* $2\pi i e_1, \ldots, 2\pi i e_g, f_1, \ldots, f_g$ *в пространстве* $\mathbb{C}^g = \mathbb{R}^{2g}$, *определенные формулами* (1.1.2), (1.1.3), *линейно независимы над полем вещественных чисел.*

Доказательство. Допустим противное: пусть некоторая линейная комбинация этих векторов равна нулю:

$$2\pi i \sum \lambda_k e_k + \sum \mu_k f_k = 0, \quad \lambda_k, \ \mu_k \in \mathbb{R}. \tag{1.3.1}$$

Из формулы (1.1.3) сразу получаем, что вещественная часть этого равенства имеет вид

$$\operatorname{Re} B\left(\sum \mu_k e_k\right) = 0.$$

Отсюда все μ_k — нулевые ввиду невырожденности матрицы $\operatorname{Re} B$. Из соотношения (1.3.1) тогда следует, что и все λ_k — нулевые. Утверждение доказано.

Пусть Γ — решетка, порожденная векторами $(2\pi i e_k, f_l)$. Векторы решетки Γ имеют вид

$$2\pi i N + BM, \tag{1.3.2}$$

где N, M — целочисленные векторы. Это в точности решетка периодов θ-функции в смысле § 1. Удобно связать с решеткой Γ другой геометрический объект — фактор пространства $\mathbb{C}^g = \mathbb{R}^{2g}$ по этой решетке. Из утверждения 1.3.1 сразу вытекает, что этот фактор $\mathbb{C}^g/\Gamma$ есть $2g$-мерный тор T^{2g}. Более того, T^{2g} имеет естественную структуру комплексной компактной группы Ли, причем выражение

$$ds^2 = -\sum_{k,l} (\operatorname{Re} B)^{-1}_{kl}\, dz_k\, d\bar{z}_l \tag{1.3.3}$$

задает на T^{2g} кэлерову метрику, которая является даже ходжевой (см. [4]). Если α_k, β_j — вещественные координаты в пространстве $\mathbb{R}^{2g} = \mathbb{C}^g$, где $z = 2\pi i\beta + B\alpha$, то мнимая часть Ω этой метрики имеет вид

$$\Omega = \sum_{k=1}^{g} d\alpha_k \wedge d\beta_k. \tag{1.3.3$'$}$$

Такие торы называются *абелевыми*. Будем обозначать абелев тор T^{2g}, построенный по матрице Римана $B = (B_{jk})$, через T^{2g} (B).

Мероморфные функции на торе T^{2g} (B) называются *абелевыми функциями.* Другими словами, абелевы функции — это $2g$-кратно периодические функции g комплексных переменных. Так, отношение двух θ-функций одинакового порядка с одинаковыми характеристиками однозначно на торе T^{2g} (B) и является поэтому абелевой функцией. Известно, что таким образом получается любая абелева функция. Ряд примеров, в которых будет явно получено выражение некоторых абелевых функций через θ-функции, мы разберем в § 4 главы 2.

Пусть $(2\pi i e_j', f_k')$ — другой базис решетки Γ, $f_k' = B'e_k'$, $B' = (B_{jk}')$ — другая матрица Римана. Переход от базиса $(2\pi i e_j, f_k)$ к базису $(2\pi i e_j', f_k')$

(и обратно) должен даваться целочисленной унимодулярной матрицей

$$(1.3.4)\qquad \begin{cases} 2\pi i e_i' = \sum\limits_j d_{ij} 2\pi i e_j + \sum\limits_j c_{ij} f_j, \\ f_i' = \sum\limits_j b_{ij} 2\pi i e_j + \sum\limits_j a_{ij} f_j, \end{cases}$$

где $a = (a_{ij})$, $b = (b_{ij})$, $c = (c_{ij})$, $d = (d_{ij})$ — целочисленные $g \times g$-матрицы, причем

$$(1.3.5)\qquad \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1.$$

При этом

$$(1.3.6)\qquad B' = 2\pi i (aB + 2\pi i b)(cB + 2\pi i d)^{-1}.$$

Требование, чтобы B' была матрицей Римана, налагает сильное ограничение на матрицу — $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — эта матрица должна быть *симплектической*:

$$(1.3.7)\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z}),$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^t & c^t \\ b^t & d^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(значок t означает транспонирование).

Матрицы Римана B, B', связанные преобразованиями вида (1.3.6), (1.3.7), называются *эквивалентными*. Они определяют одинаковые абелевы торы $T^{2g}(B) = T^{2g}(B')$ (даже с одинаковыми ходжевыми структурами (1.3.3′)) [1]

Имеет место следующий закон преобразования θ-функций при преобразованиях вида (1.3.6), (1.3.7):

$$(1.3.8)\qquad \theta[\alpha', \beta'](z' \mid B') = \\ = k \sqrt{\det M} \exp\left\{ \frac{1}{2} \sum_{i \leqslant j} z_i z_j \frac{\partial \ln \det M}{\partial B_{ij}} \right\} \theta[\alpha, \beta](z \mid B),$$

где

$$(1.3.9)\qquad M = cB + 2\pi i d, \quad 2\pi i z = z' M,$$

$$[\alpha', \beta'] = [\alpha, \beta] \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \operatorname{diag}[cd^t, ab^t];$$

k — константа, не зависящая от z, B. Здесь символ diag означает, что у матрицы $[cd^t, ab^t]$ нужно отобрать диагональные элементы (доказательство этого закона преобразования см. в [5]).

З а м е ч а н и е. Пусть $g \times g$-матрица Римана $B = (B_{jk})$ имеет блочный вид $B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & B'' \end{pmatrix}$, где B', B'' — $k \times k$- и $l \times l$-матрицы Римана. Тогда соответствующий тор $T^{2g}(B)$ распадается в прямое произведение двух абелевых торов

$$(1.3.10)\qquad T^{2g}(B) = T^{2k}(B') \times T^{2l}(B'').$$

Соответствующая θ-функция также распадается в произведение: если $z = (z_1, \ldots, z_g)$, $z' = (z_1, \ldots, z_k)$, $z'' = (z_{k+1}, \ldots, z_g)$, то

$$(1.3.11)\qquad \theta(z \mid B) = \theta(z' \mid B')\theta(z'' \mid B'').$$

---

[1]) Совокупность всех $g \times g$-матриц Римана H_g называется (левой) полуплоскостью Зигеля. Группа $\Lambda_g = \{\mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z})/t \pm 1\}$, действующая на H_g по формуле (1.3.6),— это модулярная группа Зигеля. Фактор H_g/Λ_g параметризует абелевы многообразия T^{2g} с кэлеровой метрикой типа (1.3.3), (1.3.3′).

Аналогично устроены θ-функции с характеристиками. Будем говорить, что матрица Римана B *разложима*, если она может быть приведена к блочному виду преобразованиями вида (1.3.6), (1.3.7). Соответственно будет использоваться термин «разложимый абелев тор» и «разложимая θ-функция» (формулы (1.3.10), (1.3.11)). Для противоположного случая неразложимых торов $T^{2g}(B)$ выполняется такое свойство: на торе $T^{2g}(B)$ нет абелевых функций (непостоянных), зависящих от меньшего числа переменных. Эквивалентное утверждение: если $f(z)$ — абелева функция на неразложимом торе и ее производная по какому-либо направлению равна нулю: $\sum\limits_{i=1}^{g} U_i \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0$, то $f = \mathrm{const}$.

Возвращаясь к абелевым торам, отметим следующую важную теорему: любой абелев тор является алгебраическим многообразием (Лефшец). Не давая доказательства этой теоремы в общем случае (оно основано на теории θ-функций ; см. [11]), разберем случай $g = 1$. В этом случае любой тор T^2 определяется своей парой периодов 2ω, $2\omega'$ (пусть $\operatorname{Im} \omega'/\omega > 0$). Определим эллиптическую функцию Вейерштрасса $\wp(z)$, полагая

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m^2+n^2\neq 0} \left[\frac{1}{(z-2m\omega-2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega+2n\omega')^2} \right]. \tag{1.3.12}$$

Нетрудно проверить, что ряд (1.3.12) сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C} \diagdown \{2m\omega + 2n\omega'\}$, поэтому его сумма — мероморфная функция от z, имеющая двойные полюсы в каждом узле решетки. Очевидно, что эта функция двоякопериодична:

$$\wp(z + 2m\omega + 2n\omega') = \wp(z), \qquad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{1.3.13}$$

Производная $\wp'(z)$ также двоякопериодична. Пусть

$$\begin{cases} g_2 = 60 \sum\limits_{m^2+n^2\neq 0} \dfrac{1}{(2m\omega+2n\omega')^4}, \\ g_3 = 140 \sum\limits_{n^2+m^2\neq 0} \dfrac{1}{(2m\omega+2n\omega')^6}. \end{cases} \tag{1.3.14}$$

Тогда лорановские разложения функций $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ в окрестности точки $z = 0$ имеют вид

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2 z^2}{20} + \frac{g_3 z^4}{28} + \ldots, \tag{1.3.15}$$

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \frac{g_2 z}{10} + \frac{g_3 z^3}{7} + \ldots \tag{1.3.16}$$

Из этих разложений вытекает, что функция $(\wp')^2 - [4\wp^3 - g_2\wp - g_3]$ не имеет полюса в начале координат. В силу двоякопериодичности эта функция регулярна на всей комплексной плоскости и, следовательно, является константой. Нетрудно видеть, что эта константа — нулевая. Вывод: функция Вейерштрасса $\wp(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3. \tag{1.3.17}$$

Утверждение 1.3.2. *Отображение $x(z) = \wp(z)$, $y(z) = \wp'(z)$ устанавливает изоморфизм комплексного тора $T^2 = \mathbb{C}/\{2m\omega + 2n\omega'\}$ с римановой поверхностью алгебраической функции*

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3. \tag{1.3.18}$$

Доказательство. Построим обратное отображение из комплексной алгебраической кривой (1.3.18) в тор T^2. Пусть $P=(x, y)$ — точка римановой поверхности (1.3.18). Положим

$$(1.3.19)\qquad z=z(P)=\int_{\infty}^{P}\frac{dx}{y}=\int_{\infty}^{P}\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}.$$

Путь интегрирования в интеграле (1.3.19) лежит на римановой поверхности (1.3.18). Этот путь определен неоднозначно, с точностью до прибавления целочисленной линейной комбинации базисных циклов a и b на поверхности (1.3.18) (рис. 1; здесь $4x_i^3-g_2x_i-g_3=0$; штриховой линией показана часть цикла b, лежащая на «нижнем» листе):

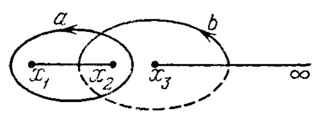

Рис. 1. Риманова поверхность (1.3.18).

$$(1.3.20)\qquad z(P)\sim z(P)+m\oint_a\frac{dx}{y}+n\oint_b\frac{dx}{y}.$$

Нетрудно проверить, что

$$(1.3.21)\qquad \oint_a\frac{dx}{y}=2\omega,\qquad \oint_b\frac{dx}{y}=2\omega'.$$

Таким образом, отображение (1.3.19) переводит кривую (1.3.18) в тор T^2. Очевидно, что отображения $z\mapsto P=(\wp(z), \wp'(z))$ и $P\mapsto\int_{\infty}^{P}\frac{dx}{y}$ взаимно обратны. Утверждение доказано.

Замечание. Укажем явную связь между функцией Вейерштрасса $\wp(z)$ и рассмотренными в § 2 θ-функциями одного переменного. Имеет место формула

$$(1.3.22)\qquad \wp(z)=-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ln\theta_1(z)+c,$$

где c — константа. Эта формула очевидна в силу периодичности правой части и полученной в § 2 информации о расположении нулей функции $\theta_1(z)$. Из формул (1.3.22) и (1.3.17) следует, что функция $\theta_1(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению третьего порядка. Дифференциальные соотношения для многомерных θ-функций мы рассмотрим ниже (см. главы 3, 4).

§ 4. Теоремы сложения для θ-функций

Тэта-функции связаны сложной системой алгебраических соотношений — так называемых теорем сложения. Все они есть соотношения между формальными рядами Фурье. Приведем две важнейшие теоремы сложения [1]).

Построим по некоторой матрице Римана B два набора θ-функций:

$$(1.4.1)\qquad \theta[\alpha,\beta](z)\equiv\theta[\alpha,\beta](z\mid B),\qquad \hat\theta[\alpha,\beta](z)\equiv\theta[\alpha,\beta](z\mid 2B).$$

Теорема сложения 1.4.1. *Пусть α, β, γ, ε — произвольные вещественные g-мерные векторы. Справедливо равенство*

$$(1.4.2)\qquad \theta[\alpha,\gamma](z_1+z_2)\,\theta[\beta,\varepsilon](z_1-z_2)=$$
$$=\sum_{2\delta\in(\mathbb{Z}_2)^g}\hat\theta\left[\frac{\alpha+\beta}{2}+\delta,\ \gamma+\varepsilon\right](2z_1)\,\hat\theta\left[\frac{\alpha-\beta}{2}+\delta,\ \gamma-\varepsilon\right](2z_2).$$

Доказательство достаточно провести для случая $\alpha=\beta=\gamma=\varepsilon=0$ (общий случай сводится к этому при помощи формулы (1.1.7)). Равенство

[1]) Соотношения на тэта-функции совсем другого типа найдены в работе [43].

(1.4.2) примет тогда вид

$$(1.4.2') \qquad \theta(z+w)\,\theta(z-w)=\sum_{2\delta\in(\mathbb{Z}_2)^g}\hat\theta[\delta,0](2z)\,\hat\theta[\delta,0](2w).$$

Разберем сначала случай $g=1$. Формула (1.4.2′) при $g=1$ запишется так:

$$(1.4.3) \qquad \theta(z+w)\,\theta(z-w)=\hat\theta(2z)\,\hat\theta(2w)+\hat\theta\left[\frac{1}{2},0\right](2z)\,\hat\theta\left[\frac{1}{2},0\right](2w),$$

где

$$\theta(z)=\sum_k \exp\left(\frac{1}{2}bk^2+kz\right),\qquad \hat\theta(z)=\sum_k \exp(bk^2+kz),$$

$$\hat\theta\left[\frac{1}{2},0\right](z)=\sum_k \exp\left[b\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\left(k+\frac{1}{2}\right)z\right],\quad b=B_{11}.$$

Левая часть равенства (1.4.3) имеет поэтому вид

$$(1.4.4) \qquad \sum_{k,\,l}\exp\left[\frac{1}{2}b(k^2+l^2)+k(z+w)+l(z-w)\right].$$

Введем новые индексы суммирования m, n, полагая

$$(1.4.5) \qquad m=\frac{k+l}{2},\quad n=\frac{k-l}{2}.$$

Числа m и n одновременно целые или одновременно полуцелые. В этих переменных сумма (1.4.4) примет вид

$$(1.4.6) \qquad \theta(z+w)\,\theta(z-w)=\sum\exp[bm^2+2mz+bn^2+2nw].$$

Эту сумму разобьем на две части. Первая часть будет содержать слагаемые с целыми m, n, а во второй части и m, и n оба будут полуцелыми. Во второй части переобозначим m через $m+\frac{1}{2}$, n через $n+\frac{1}{2}$. Тогда m и n — целые и выражение (1.4.6) перепишется в виде

$$\sum_{m,\,n\in\mathbb{Z}}\exp[bm^2+2mz]\exp[bn^2+2nw]+$$

$$+\sum_{m,\,n\in\mathbb{Z}}\exp\left[b\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(m+\frac{1}{2}\right)z\right]\exp\left[b\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(n+\frac{1}{2}\right)w\right]=$$

$$=\hat\theta(2z)\,\hat\theta(2w)+\hat\theta\left[\frac{1}{2},0\right](2z)\,\hat\theta\left[\frac{1}{2},0\right](2w).$$

Итак, в частном случае теорема доказана. В общем случае $g\geqslant 1$ нужно повторить приведенные рассуждения для каждой координаты по отдельности.

Теорема сложения 1.4.2. *Пусть* $[m_i]=[m_i', m_i'']$ $(i=1,2,3,4)$ — *произвольные вещественные $2g$-мерные векторы. Тогда имеет место равенство*

$$(1.4.7) \qquad \theta[m_1](z_1)\,\theta[m_2](z_2)\,\theta[m_3](z_3)\,\theta[m_4](z_4)=$$

$$=\frac{1}{2^g}\sum_{2a\in(\mathbb{Z}_2)^{2g}}\exp(-4\pi i\langle m_1', a''\rangle)\,\theta[n_1+a](w_1)\ldots\theta[n_4+a](w_4),$$

где $a=(a', a'')$,

$$(1.4.8) \qquad (z_1,\ldots,z_4)=(w_1,\ldots,w_4)\,T,\qquad T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},$$

$$(1.4.8') \qquad [n_i]=[n_i', n_i''],\quad (m_1,\ldots,m_4)=(n_1,\ldots,n_4)T.$$

(Каждая единица в матрице T есть единичная $g\times g$- или $2g\times 2g$-матрица.)

Доказательство снова разберем для простейшего случая $g = 1$. Матрица T обладает двумя важными свойствами: она симметрическая и ортогональная. Общий член суммы в левой части имеет вид

$$(1.4.9)\qquad \exp\left\{\frac{1}{2}b\,[(k_1+m_1')^2+\ldots+(k_4+m_4')^2]+\right.$$
$$\left.+(k_1+m_1')(z_1+2\pi i m_1'')+\ldots+(k_4+m_4')(z_4+2\pi i m_4'')\right\},$$

где $k_1, \ldots, k_4$ — целые числа. Введем новые переменные суммирования $l_1, \ldots, l_4$, полагая

$$(1.4.10)\qquad (l_1, \ldots, l_4) = (k_1, \ldots, k_4)T.$$

Назовем набор $k_1, \ldots, k_4$ четным, если сумма $k_1 + \ldots + k_4$ — четная. В противном случае этот набор будет называться нечетным. Для четного набора $k_1, \ldots, k_4$ все числа $l_1, \ldots, l_4$ — целые, для нечетного — полуцелые. Учитывая формулы (1.4.8), (1.4.10), а также ортогональность и симметричность матрицы T, получим вид выражения (1.4.9) в новых переменных:

$$(1.4.11)\qquad \exp\left\{\frac{1}{2}b\,[(l_1+n_1')^2+\ldots+(l_4+n_4')^2]+\right.$$
$$\left.+(l_1+n_1')(w_1+2\pi i n_1'')+\ldots+(l_4+n_4')(w_4+2\pi i n_4'')\right\}.$$

Сумму экспонент вида (1.4.11) разобьем на две части: $\Sigma_{(1)}$ и $\Sigma_{(2)}$. В $\Sigma_{(1)}$ входят только целые $l_1, \ldots, l_4$, в $\Sigma_{(2)}$ — только полуцелые. В $\Sigma_{(2)}$, как и в доказательстве предыдущей теоремы, сделаем замену $l_i \mapsto l_i + \frac{1}{2}$, после чего и в $\Sigma_{(1)}$ и в $\Sigma_{(2)}$ будут входить только целые индексы суммирования $l_1, \ldots, l_4$. Заметим, что набор $l_1, \ldots, l_4$ обязан быть четным, так как числа $k_1, \ldots, k_4$ — целые и $(k_1, \ldots, k_4) = (l_1, \ldots, l_4)T$. Таким образом, суммирование в $\Sigma_{(1)}$ и в $\Sigma_{(2)}$ ведется только по четным наборам $l_1, \ldots, l_4$. Будем суммировать по всем наборам $l_1, \ldots, l_4$ и для компенсации вклада от нечетных наборов добавим еще суммы $\Sigma_{(1)}'$ и $\Sigma_{(2)}'$, в которых в общем члене сделана замена $n_i'' \mapsto n_i'' + \frac{1}{2}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ и, кроме того, ко всему показателю экспоненты добавлен член $-(n_1' + \ldots + n_4')\pi i = -4\pi i m_1'/2$. После таких преобразований в сумме $\Sigma_{(1)} + \Sigma_{(1)}'$ четные слагаемые удвоятся, а нечетные взаимно уничтожатся. То же самое справедливо в отношении суммы $\Sigma_{(2)} + \Sigma_{(2)}'$. Итак, получаем

$$\theta[m_1](z_1)\ldots\theta[m_4](z_4) = \frac{1}{2}\left(\Sigma_{(1)}+\Sigma_{(1)}'+\Sigma_{(2)}+\Sigma_{(2)}'\right).$$

Это в точности совпадает с формулой (1.4.7) для $g = 1$. В общем случае доказательство проводится аналогично, нужно лишь повторить приведенные рассуждения для каждой координаты.

Полагая в формуле (1.4.7) $z_1 = u + v$, $z_2 = u - v$, $z_3 = z_4 = 0$, будем иметь $w_1 = w_2 = u$, $w_3 = w_4 = v$. Вторая теорема сложения в этом частном случае примет вид

$$(1.4.12)\qquad \theta[m_1](u+v)\,\theta[m_2](u-v)\,\theta[m_3](0)\,\theta[m_4](0) =$$
$$= \frac{1}{2^g}\sum_{2a\in(\mathbb{Z}_2)^{2g}} \exp[-4\pi i\langle m_1', a''\rangle]\,\theta[n_1+a](u)\,\theta[n_2+a](u)\times$$
$$\times\,\theta[n_3+a](v)\,\theta[n_4+a](v),$$

где связь характеристик $n_1, \ldots, n_4$ с характеристиками $m_1, \ldots, m_4$ дается формулой (1.4.8').

ГЛАВА 2
ТЭТА-ФУНКЦИИ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ. ЗАДАЧА ОБРАЩЕНИЯ ЯКОБИ

§ 1. Периоды абелевых дифференциалов на римановых поверхностях. Многообразие Якоби

Пусть Г — компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 1$ [1]). Если Г — риманова поверхность алгебраической функции $w = w(z)$, задаваемой уравнением

$$R(w, z) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \ldots + a_n(z) = 0, \tag{2.1.1}$$

где $R(w, z)$ — многочлен, то аффинная часть Г совпадает с комплексной алгебраической кривой (2.1.1) в $\mathbb{C}^2$, в случае, если эта кривая — неособая (гладкая). Важный для нас пример — гиперэллиптические кривые, задаваемые уравнениями

$$w^2 = P_{2g+1}(z), \tag{2.1.2}$$

или

$$w^2 = P_{2g+2}(z), \tag{2.1.3}$$

где $P_{2g+1}(z)$ и $P_{2g+2}(z)$ — многочлены без кратных корней степеней $2g+1$ и $2g+2$ соответственно (и в том и в другом случае род соответствующей римановой поверхности равен g). Отметим, что любая риманова поверхность рода $g = 1$ или $g = 2$ имеет вид (2.1.2) (или (2.1.3); см. [3]); для рода $g = 3$ это уже не так.

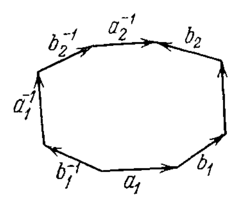

Рис. 2.

Топологически поверхность рода g представляет собой сферу с приклеенными g ручками. В одномерных гомологиях $H_1(\Gamma) = \mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}$ ($2g$ слагаемых) можно выбрать базис циклов (замкнутых контуров) $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ со следующими индексами пересечений:

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, g). \tag{2.1.4}$$

Такой базис обладает тем свойством, что при разрезании по этим циклам поверхность Г превращается в $4g$-угольник, который мы обозначим через $\tilde{\Gamma}$ (см. рис. 2 для $g = 2$). Каждый цикл превращается в пару сторон a_i, a_i^{-1}, b_i, b_i^{-1} $4g$-угольника $\tilde{\Gamma}$, отождествляемых на поверхности Г.

Дифференциальные 1-формы $\omega = a\,dx + b\,dy = \alpha\,dz + \beta\,d\bar{z}$ (где $z = x + iy$ — комплексная локальная координата на Г) мы будем называть просто дифференциалами.

Определение 2.1.1. Дифференциал ω называется *абелевым дифференциалом первого рода* или *голоморфным дифференциалом*, если он в окрестности любой точки записывается в виде

$$\omega = f(z)dz, \tag{2.1.5}$$

где $f(z)$ — аналитическая функция, z — локальная координата.

Например, на гиперэллиптической поверхности (2.1.2) дифференциалы $\omega_1, \ldots, \omega_g$ вида

$$\omega_k = \frac{z^{k-1}}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}}\,dz \qquad (k = 1, \ldots, g) \tag{2.1.6}$$

все являются голоморфными.

[1]) В дальнейшем будут встречаться только компактные римановы поверхности, и мы не будем каждый раз об этом напоминать.

Голоморфный дифференциал замкнут: $d\omega = 0$. Комплексно сопряженный дифференциал $\overline{\omega} = \overline{f(z)}d\overline{z}$ также замкнут. Для любого замкнутого дифференциала ω на поверхности Γ определены его периоды по циклам $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$:

$$\oint_{a_i} \omega = A_i, \quad \oint_{b_i} \omega = B_i \quad (i=1, \ldots, g). \tag{2.1.7}$$

Фиксируем точку P_0, не лежащую на циклах a_i, b_j. Тогда можно определить функцию

$$f(P) = \int_{P_0}^{P} \omega, \tag{2.1.8}$$

однозначную на рассеченной поверхности $\widetilde{\Gamma}$. Имеет место полезная

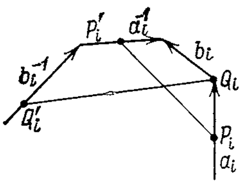

Рис. 3.

Лемма 2.1.1. *Пусть ω, ω' — два замкнутых дифференциала на* Γ; *A_i, A_i', B_i, B_i' — набор их a- и b-периодов; $f(P) = \int_{P_0}^{P} \omega$; тогда*

$$\iint_{\Gamma} \omega \wedge \omega' = \oint_{\partial\widetilde{\Gamma}} f\omega' = \sum_{i=1}^{g} (A_iB_i' - A_i'B_i). \tag{2.1.9}$$

Здесь $\partial\widetilde{\Gamma}$ — граница $4g$-угольника $\widetilde{\Gamma}$, ориентированная в положительном направлении.

Доказательство. Равенство $\iint_{\Gamma} \omega \wedge \omega' = \oint_{\partial\widetilde{\Gamma}} f\omega'$ очевидно из формулы Стокса. Далее,

$$\oint_{\partial\widetilde{\Gamma}} f\omega' = \sum_{i=1}^{g} \Big(\int_{a_i} + \int_{a_i^{-1}} \Big) f\omega' + \sum_{i=1}^{g} \Big(\int_{b_i} + \int_{b_i^{-1}} \Big) f\omega'. \tag{2.1.10}$$

Из рис. 3 видно, что $f(P_i) - f(P_i') = \int_{P_i'}^{P_i} \omega = -B_i$ (цикл P_iP_i' на поверхности Γ гомологичен циклу b_i) и $f(Q_i) - f(Q_i') = A_i$ по аналогичной причине. Поэтому сумма (2.1.10) перепишется в виде

$$\oint_{\partial\widetilde{\Gamma}} f\omega' = \sum_{i=1}^{g} (-B_i) \oint_{a_i} \omega' + \sum_{i=1}^{g} A_i \oint_{b_i} \omega' = \sum_{i=1}^{g} (A_iB_i' - A_i'B_i).$$

Лемма доказана.

Применяя эту лемму к паре ω, $\overline{\omega}$, где ω — голоморфный дифференциал, $\overline{\omega}$ — ему комплексно сопряженный, получаем

Следствие 1. *Пусть ω — ненулевой голоморфный дифференциал на Γ. Тогда для его a- и b-периодов A_k, B_k справедливо неравенство*

$$\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{g} A_k\overline{B}_k < 0 \tag{2.1.11}$$

(Im — *мнимая часть*).

Отсюда сразу вытекает

Следствие 2. *Если все a-периоды $A_1, \ldots, A_g$ голоморфного дифференциала ω нулевые, то $\omega \equiv 0$.*

Для гиперэллиптической римановой поверхности мы предъявили выше набор из g голоморфных дифференциалов $\omega_1, \ldots, \omega_g$ (формула 2.1.6). Для любой римановой поверхности Γ также можно построить g линейно независимых голоморфных дифференциалов $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — доказательство их существования см. в [1]. Отсюда и из следствия 2 получаем

Следствие 3. *Пространство голоморфных дифференциалов на римановой поверхности рода g g-мерно.*

Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_g$ — набор линейно независимых голоморфных дифференциалов на римановой поверхности Γ. Тогда матрица

$$A_{jk} = \oint_{a_k} \eta_j \tag{2.1.12}$$

их a-периодов невырождена. В самом деле, в противном случае некоторая нетривиальная линейная комбинация $\eta = c_1\eta_1 + \ldots + c_g\eta_g$ имела бы нулевые a-периоды, что противоречит следствию 2. Поэтому можно выбрать другой базис голоморфных дифференциалов $\omega_1, \ldots, \omega_g$,

$$\omega_j = \sum_{k=1}^{g} c_{jk}\eta_k \quad (j = 1, \ldots, g), \tag{2.1.13}$$

нормированных условиями

$$\oint_{a_k} \omega_j = 2\pi i\delta_{jk} \quad (j,\ k = 1, \ldots, g). \tag{2.1.14}$$

Здесь (c_{jk}) — невырожденная матрица, имеющая вид $(c_{jk}) = 2\pi i(A_{jk})^{-1}$. Такой базис голоморфных дифференциалов называется *каноническим* базисом, сопряженным к базису циклов $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$.

Построим по каноническому базису $\omega_1, \ldots, \omega_g$ матрицу b-периодов

$$B_{jk} = \oint_{b_k} \omega_j \quad (j,\ k = 1, \ldots, g). \tag{2.1.15}$$

Теорема 2.1.1. *Матрица B_{jk} является матрицей Римана.*

Доказательство. Симметричность B_{jk} вытекает из леммы 2.1.1, примененной к паре базисных дифференциалов $\omega = \omega_j$, $\omega' = \omega_k$ (очевидно, $\omega \wedge \omega' = 0$, если дифференциалы ω, ω' — оба голоморфные). Для доказательства отрицательной определенности вещественной части $\operatorname{Re} B_{jk}$ рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию

$$\omega = \sum_{j=1}^{g} c_j\omega_j, \tag{2.1.16}$$

где все коэффициенты $c_1, \ldots, c_g$ — вещественные. Периоды этого голоморфного дифференциала таковы:

$$A_k = 2\pi i c_k, \quad B_k = \sum_{j=1}^{g} c_j B_{jk} \quad (k = 1, \ldots, g).$$

Применяя к нему неравенство (2.1.11), получим

$$2\pi \sum_{j,\ k=1}^{g} \operatorname{Re} B_{jk}c_k c_j = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{g} A_k\overline{B}_k < 0.$$

Теорема доказана.

Итак, по каждой римановой поверхности Γ рода g и базису циклов $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ на ней мы построили матрицу Римана B_{jk}.

Определение 2.1.2. Построенный по матрице $B = (B_{jk})$ периодов голоморфных дифференциалов на римановой поверхности Г абелев тор $T^{2g}(B)$ называется *многообразием Якоби* (или *якобианом*) этой поверхности и обозначается через $J(\Gamma)$:

$$J(\Gamma) = T^{2g}(B) = \mathbb{C}^g/\{2\pi i N + BM\}. \tag{2.1.17}$$

Построенные по этой матрице θ-функции $\theta[\alpha, \beta](z \mid B)$ называются *θ-функциями римановой поверхности* Г.

Если $a'_1, \ldots, a'_g, b'_1, \ldots, b'_g$ — другой базис циклов с индексами пересечений вида (2.1.4), то переход от старого базиса к новому дается целочисленной матрицей, которая должна быть симплектической (индекс пересечения — кососимметрическая невырожденная форма на $H_1(\Gamma)$, задаваемая в обоих базисах одной матрицей). Таким образом, замена базиса циклов в $H_1(\Gamma)$ приводит к эквивалентной матрице Римана B'_{jk} (связанной со старой преобразованиями вида (1.3.6), (1.3.7)). Поэтому определение многообразия Якоби $J(\Gamma)$ не зависит от выбора базиса циклов. Соответствующая θ-функция при этом также меняется несущественно в силу закона преобразования (1.3.8).

Замечание. Возникает естественный вопрос: какие матрицы Римана B_{jk} являются матрицами периодов голоморфных дифференциалов на римановой поверхности? Известно одно ограничение на такие матрицы $B = (B_{jk})$: они не могут иметь блочного вида $B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ 0 & B'' \end{pmatrix}$, где B', B'' — снова матрицы Римана меньшего рода (более точно, не могут быть приведены к блочному виду преобразованиями (1.3.6), (1.3.7)). Для родов $g = 1, 2, 3$ никаких других ограничений нет: любая матрица Римана (общего положения) есть матрица периодов голоморфных дифференциалов на римановой поверхности. Для $g = 1$ это было доказано в § 3 главы 1; для $g = 2, 3$ мы получим это в главе 4. Из соображений размерности видно, что для $g \geqslant 4$ это уже не так. Известно, что совокупность всех (неизоморфных) римановых поверхностей рода $g > 1$ зависит от $3g - 3$ комплексных параметров. Такая же размерность у совокупности матриц периодов на этих поверхностях. В то же время матрицы Римана образуют открытый конус в комплексном пространстве размерности $g(g + 1)/2$. Поэтому уже при $g = 4$ должно иметься одно соотношение на матрицу периодов B_{jk} (найденное Шоттки [26]). Для больших родов такие соотношения до сих пор в хорошем виде не выписаны. Мы вернемся к этому вопросу в главе 4.

Пусть теперь ω — мероморфный дифференциал на Г (допускаются особенности типа полюсов). Будем считать, что его полюсы не лежат на циклах a_i, b_j. Прибавляя подходящий голоморфный дифференциал, можно добиться, чтобы ω имел нулевые a-периоды; при этом расположение полюсов и соответствующие главные части ω не изменятся. Такая нормировка вместе с заданием полюсов и главных частей определяет мероморфный дифференциал ω уже однозначно (в противном случае разность двух таких дифференциалов была бы голоморфным дифференциалом с нулевыми a-периодами).

Любой мероморфный дифференциал имеет нулевую сумму вычетов на Г. Поэтому он может быть представлен в виде линейной комбинации (с точностью до прибавления голоморфного) следующих базисных мероморфных дифференциалов [1]):

[1]) Мы не доказываем здесь существование таких дифференциалов (см. [1]). Для гиперэллиптической римановой поверхности их нетрудно предъявить явными формулами. В общем случае существование таких дифференциалов может быть выведено, например, из теоремы Римана — Роха (см. ниже § 3).

а) Абелевы дифференциалы второго рода. Так называются дифференциалы $\omega_Q^{(n)}$ с одним полюсом в точке Q кратности $n+1$ и с главной частью вида

$$\omega_Q^{(n)} = \frac{dz}{z^{n+1}} + \ldots \qquad (n \geqslant 1). \tag{2.1.18}$$

б) Абелевы дифференциалы третьего рода ω_{PQ}. Они имеют пару простых полюсов в точках P, Q с вычетами соответственно $+1$ и -1.

Напомним, что эти дифференциалы определяются однозначно нормировкой

$$\oint_{a_i} \omega_Q^{(n)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, g), \tag{2.1.19}$$

$$\oint_{a_i} \omega_{PQ} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, g). \tag{2.1.20}$$

Перечислим необходимые для дальнейшего соотношения между b-периодами этих дифференциалов

Лемма 2.1.2. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\oint_{b_i} \omega_Q^{(n)} = \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1} f_i(Q)}{dz^{n-1}} \qquad (i = 1, \ldots, g;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{2.1.21}$$

$$\oint_{b_i} \omega_{PQ} = \int_Q^P \omega_i \qquad (i = 1, \ldots, g), \tag{2.1.22}$$

где $\omega_Q^{(n)}$, ω_{PQ} — введенные выше нормированные дифференциалы 2-го и 3-го родов, $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базисные голоморфные дифференциалы, записывающиеся в окрестности точки Q в виде $\omega_i = f_i(z)dz$.

Доказательство соотношений (2.1.21), (2.1.22) получается интегрированием выражений $A_i\omega_Q^{(n)}$ и $A_i\omega_{PQ}$, где $A_i(P) = \int_{P_0}^P \omega_i$, по границе области, получающейся из $4g$-угольника $\widetilde{\Gamma}$ удалением набора отрезков, ведущих из начальной точки P_0 в полюсы этих дифференциалов. Вычисления, подобные вычислениям в доказательстве леммы 2.1.1, мы опускаем.

§ 2. Теорема Абеля

Пусть Γ — риманова поверхность рода g; $J(\Gamma)$ — ее многообразие Якоби. Определим *отображение Абеля* $A(P) = (A_1(P), \ldots, A_g(P))$,

$$A\colon \Gamma \to J(\Gamma),$$

полагая

$$A_k(P) = \int_{P_0}^P \omega_k \qquad (k = 1, \ldots, g). \tag{2.2.1}$$

Здесь P_0 — фиксированная точка; путь интегрирования из точки P_0 в P выбирается одинаково для всех k. Если в формуле (2.2.1) выбрать другой путь интегрирования из P_0 в P, то к интегралу в правой части добавится интеграл $\oint_\gamma \omega_k$, где γ — некоторый замкнутый контур (цикл). Цикл γ можно представить в виде целочисленной линейной комбинации базисных циклов:

$$\gamma = \sum_j n_j a_j + \sum_j m_j b_j. \tag{2.2.2}$$

Поэтому добавок в правой части формулы (2.2.1) имеет вид

$$\oint_\gamma \omega_k = 2\pi i n_k + \sum_j B_{jk} m_j, \tag{2.2.3}$$

а это есть k-я компонента некоторого вектора решетки $\{2\pi i N + BM\}$, по которой мы факторизуем. Тем самым мы доказали корректность определения отображения Абеля.

Для рода $g = 1$ (эллиптическая риманова поверхность) мы уже рассматривали отображение Абеля в § 3 главы 1 и выяснили, что оно является изоморфизмом этой римановой поверхности с двумерным комплексным тором, который и есть ее многообразие Якоби.

Применим отображение Абеля для решения следующей задачи. Пусть f — мероморфная функция на римановой поверхности Г. Число ее нулей на Г должно совпадать с числом полюсов (каждый нуль и полюс считается столько раз, какова его кратность). Возникает вопрос: какие наборы точек $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ могут быть нулями и полюсами мероморфной функции на Г? Ответ дает

Т е о р е м а А б е л я. *Для того чтобы точки $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ римановой поверхности Г были нулями и полюсами некоторой мероморфной функции, необходимо и достаточно, чтобы на многообразии Якоби $J(\Gamma)$ выполнялось соотношение*

$$\sum_{k=1}^{n} A(P_k) - \sum_{k=1}^{n} A(Q_k) \equiv 0 \tag{2.2.4}$$

(*знаком $\equiv$ здесь и далее мы будем обозначать сравнение по модулю решетки периодов*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция f имеет на Г нули в точках $P_1, \ldots, P_n$ и полюсы в точках $Q_1, \ldots, Q_n$. Рассмотрим мероморфный дифференциал $\Omega = d \ln f$. Дифференциал Ω имеет только простые полюсы с вычетом $+1$ в точках $P_1, \ldots, P_n$ и с вычетом -1 в точках $Q_1, \ldots, Q_n$. Поэтому этот дифференциал может быть представлен в виде

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_{P_k Q_k} + \sum_{j=1}^{g} c_j \omega_j, \tag{2.2.5}$$

где $\omega_{P_k Q_k}$ — нормированные дифференциалы 3-го рода, $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базисные голоморфные дифференциалы, $c_1, \ldots, c_g$ — константы (см. выше § 1). Поскольку функция f однозначна на поверхности Г, интеграл Ω по любому замкнутому циклу должен быть целым кратным $2\pi i$. В частности,

$$\oint_{a_k} \Omega = 2\pi i n_k, \qquad \oint_{b_k} \Omega = 2\pi i m_k, \tag{2.2.6}$$

где числа n_k, m_k — целые. Отсюда, учитывая нормировку (2.1.20), получаем

$$2\pi i n_k = \oint_{a_k} \Omega = 2\pi i c_k, \qquad c_k = n_k. \tag{2.2.7}$$

Далее, формулы (2.1.22) для b-периодов дифференциалов ω_{PQ} дают

$$2\pi i m_k = \oint_{b_k} \Omega = \sum_{j=1}^{n} \int_{Q_j}^{P_j} \omega_k + \sum_{j=1}^{g} n_j B_{jk}. \tag{2.2.8}$$

Отсюда получаем

$$\left[\sum_j A(P_j)-\sum_j A(Q_j)\right]_k=-\sum_j\int\limits_{Q_j}^{P_j}\omega_k=-2\pi i m_k+\sum n_j B_{jk}.$$

В правой части этого равенства стоит k-я компонента некоторого вектора решетки, что и означает справедливость соотношений (2.2.4). Проводя рассуждения в обратном порядке, мы получаем дифференциал Ω с нужными полюсами и с периодами, являющимися целыми кратными $2\pi i$. Тогда функция $f(P)=\exp\int\limits_{P_0}^{P}\Omega$ будет однозначной на поверхности Γ и иметь нужные особенности. Теорема доказана.

§ 3. Несколько замечаний о дивизорах на римановой поверхности

1. *Дивизором* на римановой поверхности Γ называется набор точек этой поверхности с кратностями. Удобно записывать дивизоры в виде формальных целочисленных линейных комбинаций точек Γ:

$$(2.3.1)\qquad D=\sum_{i=1}^{N} n_iP_i;\qquad n_i\text{ — целые.}$$

Например, для любой мероморфной функции определен дивизор (f) ее нулей $P_1,\ldots,P_n$ кратностей $p_1,\ldots,p_n$ и полюсов $Q_1,\ldots,Q_m$ кратностей $q_1,\ldots$ $\ldots,q_m$:

$$(2.3.2)\qquad (f)=p_1P_1+\ldots+p_nP_n-q_1Q_1-\ldots-q_mQ_m.$$

Дивизоры образуют абелеву группу:

$$(2.3.3)\qquad D=\sum n_iP_i,\quad D'=\sum n_i'P_i',\quad D+D'=\sum n_iP_i+\sum n_i'P_i'$$

(нулем является «пустой дивизор»).

2. *Степенью* дивизора $D=\sum n_iP_i$ называется число

$$(2.3.4)\qquad \deg D=\sum n_i.$$

Например, степень дивизора мероморфной функции равна нулю (число нулей равно числу полюсов с учетом кратностей). Степень есть линейная функция на группе дивизоров: $\deg(D+D')=\deg D+\deg D'$.

3. Назовем два дивизора D,D' *линейно эквивалентными*, если их разность $D-D'$ является дивизором некоторой мероморфной функции. Сами дивизоры мероморфных функций объявляются линейно эквивалентными нулю (они называются также главными дивизорами). Степени двух линейно эквивалентных дивизоров совпадают.

П р и м е р. Для любого абелева дифференциала $\omega=f(z)dz$ на поверхности Γ рассмотрим его дивизор нулей и полюсов (ω). Если $\eta=g(z)dz$ — другой абелев дифференциал и (η) — его дивизор, то дивизоры (ω) и (η) линейно эквивалентны, поскольку частное ω/η есть мероморфная функция на Γ (dz «сокращается»). Класс эквивалентности дивизоров всех абелевых дифференциалов называется *каноническим классом* поверхности Γ и обозначается через C. Степень дивизоров этого класса равна $2g-2$ (см. [1]).

Продолжим линейно отображение Абеля (2.2.1) на группу всех дивизоров

$$(2.3.5)\qquad D=\sum_i n_iP_i,\quad A(D)=\sum_i n_iA(P_i).$$

Теперь теорема Абеля может быть переформулирована в следующем виде:

для того чтобы два дивизора D и D' были линейно эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

1) $$\deg D = \deg D'.$$

2) На многообразии Якоби $J(\Gamma)$ верно равенство $A(D) \equiv A(D')$ (напомним: знак $\equiv$ означает сравнение по модулю решетки периодов).

4. *Положительным* (или *эффективным*) называется дивизор $D = \sum n_i P_i$, для которого все кратности n_i положительны. Два дивизора D, D' связаны неравенством $D \geqslant D'$, если, по определению, их разность $D - D'$ есть положительный дивизор. Отметим полезное свойство дивизоров степени $\geqslant g$: любой такой дивизор линейно эквивалентен положительному. Это может быть выведено, например, из результатов следующего параграфа.

С каждым дивизором D связано линейное пространство таких мероморфных функций $L(D)$ на Γ, для дивизоров (f) которых выполняется неравенство

$$(f) \geqslant -D. \tag{2.3.6}$$

В частности, если дивизор $D = \sum n_i P_i$ положителен, то пространство $L(D)$ состоит из тех мероморфных функций, которые могут иметь полюсы только в точках P_i кратности не выше n_i. Размерность пространства $L(D)$ обозначается через $l(D)$. Ясно, что для двух линейно эквивалентных дивизоров D, D' числа $l(D)$ и $l(D')$ совпадают (пространства $L(D)$ и $L(D')$ изоморфны).

Для положительного дивизора D общего положения число $l(D)$ ведет себя следующим образом. 1) Если степень $\deg D$ не превосходит g, то мероморфные функции с полюсами в D — только константы, т. е. $l(D) = 1$. В частности, если дивизор D имеет вид $D = nP$; P — фиксированная точка общего положения на Γ; n — целое положительное число, то при $n \leqslant g$ $l(nP) = 1$. Это означает, что мероморфных функций (отличных от констант) с единственным полюсом кратности $\leqslant g$, вообще говоря, нет. Те точки римановой поверхности, для которых такие мероморфные функции все же существуют, называются *точками Вейерштрасса*. Например, на гиперэллиптической римановой поверхности вида $w^2 = P_{2g+2}(z) = \prod\limits_{k=1}^{2g+2} (z - z_k)$ каждая точка ветвления $z = z_i$ $(w = 0)$ является точкой Вейерштрасса, поскольку мероморфная функция $f_i(z) = 1/(z - z_i)$ имеет в ней полюс второго порядка. Для гиперэллиптической поверхности рода g, заданной многочленом нечетной степени $w^2 = P_{2g+1}(z)$, точек Вейерштрасса также $2g + 2$ (одна — бесконечно удаленная).

Если степень $\deg D \geqslant g$, то для дивизора общего положения размерность $l(D)$ дается формулой

$$l(D) = \deg D - g + 1. \tag{2.3.7}$$

Такие дивизоры называются еще *неспециальными*. Для всех остальных дивизоров D с $\deg D \geqslant g$, которые называются *специальными*, размерность $l(D) > \deg D - g + 1$. Оказывается (см. [4]), специальные дивизоры $D = P_1 + \ldots + P_N$, $N = \deg D \geqslant g$,— это в точности критические точки отображения Абеля

$$\begin{cases} S^N\Gamma \xrightarrow{A} J(\Gamma), \\ A(P_1, \ldots, P_N) = A(P_1) + \ldots + A(P_N), \end{cases} \tag{2.3.8}$$

т. е. такие наборы точек $(P_1, \ldots, P_N)$, в которых ранг дифференциала отображения (2.3.8) меньше, чем g. Здесь через $S^N\Gamma$ обозначена совокупность неупорядоченных наборов из точек поверхности Γ («N-я симметрическая степень Γ»).

В общем случае информацию о числах $l(D)$ можно извлекать из теоремы Римана — Роха:

(2.3.9) $$l(D) = \deg D - g + 1 + l(C - D),$$

где C — определенный выше канонический класс. Эту теорему мы здесь обсуждать не будем (см. [1] — [4]).

§ 4. Задача обращения Якоби. Примеры

Мы видели выше (см. § 3 главы 1), что для рода $g = 1$ отображение Абеля $A\colon \Gamma \to J(\Gamma)$ обратимо и является изоморфизмом. Для больших родов $g > 1$ задача обращения отображения Абеля ставится так (*задача обращения Якоби*): для данной точки $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_g) \in J(\Gamma)$ найти g точек $P_1, \ldots, P_g$ римановой поверхности Γ таких, что

(2.4.1) $$\sum_{k=1}^{g} \int_{P_0}^{P_k} \omega_j \equiv \zeta_j \quad (j = 1, \ldots, g).$$

Здесь $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — канонический базис голоморфных дифференциалов на Γ; P_0 — фиксированная точка поверхности Γ. Система (2.4.1) должна выполняться на якобиане $J(\Gamma)$ (знак $\equiv$, как обычно, обозначает сравнение по модулю решетки периодов).

Неупорядоченные наборы из g точек поверхности Γ образуют *g-ю симметрическую степень* $S^g\Gamma$ римановой поверхности Γ. На языке отображения Абеля задачу (2.4.1) можно переписать так: обратить отображение

(2.4.2) $$A\colon S^g\Gamma \to J(\Gamma),$$

где

(2.4.3) $$A(P_1, \ldots, P_g) = A(P_1) + \ldots + A(P_g).$$

Мы покажем, что для почти любой точки $\zeta \in J(\Gamma)$ набор точек $(P_1, \ldots, P_g) = A^{-1}(\zeta)$ существует и определяется системой (2.4.1) однозначно (без учета их порядка).

Для решения задачи обращения Якоби мы используем θ-функцию Римана $\theta(z) \equiv \theta(z \mid B)$ римановой поверхности Γ. Здесь $B = (B_{jk})$ — матрица периодов голоморфных дифференциалов на Γ (см. выше § 1). Пусть $e = (e_1, \ldots, e_g) \in \mathbb{C}^g$ — фиксированный вектор. Рассмотрим функцию

(2.4.4) $$F(P) = \theta(A(P) - e).$$

Функция $F(P)$ однозначна и аналитична на рассеченной поверхности $\tilde\Gamma$. Предположим, что $F(P)$ не есть тождественный нуль. Так будет, например, если $\theta(e) \neq 0$.

Лемма 2.4.1. *Если $F(P) \not\equiv 0$, то функция $F(P)$ имеет на $\tilde\Gamma$ g нулей (с учетом их кратностей).*

Доказательство. Для подсчета числа нулей нужно вычислить логарифмический вычет

(2.4.5) $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde\Gamma} d \ln F(P)$$

(предполагаем, что нули $F(P)$ не лежат на границе $\partial\tilde\Gamma$). Введем для краткости следующие обозначения (полезные и в дальнейшем): через F^+ будем обозначать значение, которое принимает функция F в точке на $\partial\tilde\Gamma$, лежащей на отрезке a_k или b_k, а через F^- — значение F в соответствующей точке на a_k^{-1} и b_k^{-1} (см. рис. 2). Аналогичный смысл имеют выражения A^+ и A^-. В этих обозначениях интеграл (2.4.5) перепишется в виде

$$(2.4.6)\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\widetilde{\Gamma}} d\ln F(P)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{g}\Big(\int\limits_{a_k}+\int\limits_{b_k}\Big)\Big[d\ln F^+ - d\ln F^-\Big].$$

Заметим, что если P — точка на a_k, то

$$(2.4.7)\qquad A_j^-(P) = A_j^+(P) + B_{jk},$$

а если P лежит на b_k, то

$$(2.4.8)\qquad A_j^+(P) = A_j^-(P) + 2\pi i\delta_{jk}$$

(ср. доказательство леммы 2.1.1). Из закона преобразования θ-функции (формулы (1.1.4), (1.1.5)) получим на цикле a_k

$$(2.4.9)\qquad \ln F^-(P) = -\frac{1}{2}B_{kk} - A_k(P) + e_k + \ln F_j^+(P);$$

на цикле b_k

$$(2.4.10)\qquad \ln F^+ = \ln F^-.$$

Поскольку $dA_k(P) = \omega_k$, то отсюда имеем: на a_k

$$(2.4.11)\qquad d\ln F^-(P) = d\ln F^+(P) - \omega_k;$$

на b_k

$$(2.4.12)\qquad d\ln F^- = d\ln F^+.$$

Итак, сумма (2.4.6) перепишется в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\widetilde{\Gamma}} d\ln F = \frac{1}{2\pi i}\sum_k\int\limits_{a_k}\omega_k = g,$$

где мы использовали условие нормировки $\oint\limits_{a_k}\omega_k = 2\pi i$. Лемма доказана.

Мы покажем теперь, что g нулей функции $F(P)$ и дают решение задачи обращения Якоби при подходящем выборе вектора e.

Л е м м а 2.4.2. *Пусть $F(P)\not\equiv 0$ и $P_1, \ldots, P_g$ — ее нули на* Г. *Тогда на многообразии Якоби J(Г) справедливо соотношение*

$$(2.4.13)\qquad A(P_1, \ldots, P_g) \equiv e - K,$$

где $K = (K_1, \ldots, K_g$ — вектор римановых констант,

$$(2.4.14)\quad K_j = \frac{2\pi i + B_{jj}}{2} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{l\neq j}\int\limits_{a_l}\Big(\omega_l(P)\int\limits_{P_0}^{P}\omega_j\Big)\qquad (j=1, \ldots, g).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим следующий интеграл:

$$(2.4.15)\qquad \zeta_j = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial\widetilde{\Gamma}} A_j(P)\,d\ln F(P),\qquad (j=1, \ldots, g).$$

С одной стороны, он равен сумме вычетов подынтегрального выражения, т. е.

$$(2.4.16)\qquad \zeta_j = A_j(P_1) + \ldots + A_j(P_g),$$

где $P_1, \ldots, P_g$ — нули функции $F(P)$. С другой стороны, как и в лемме 2.4.1, имеем (см. формулы (2.4.7) — (2.4.12))

$$\zeta_j=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{g}\left(\int_{a_k}+\int_{b_k}\right)(A_j^+ d\ln F^+ - A_j^- d\ln F^-)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{g}\int_{a_k}[A_j^+ d\ln F^+ - (A_j^+ + B_{jk})(d\ln F^+ - \omega_k)]+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{g}\int_{b_k}[A_j^+ d\ln F^+ - (A_j^+ - 2\pi i\delta_{jk})\,d\ln F^+]=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{g}\left(\int_{a_k}A_j^+\omega_k - B_{jk}\int_{a_k}d\ln F^+ + 2\pi i B_{jk}\right)+\int_{b_j}d\ln F^+.$$

Функция F принимает в концах отрезка a_k одинаковые значения, поэтому

$$\int_{a_k} d\ln F^+ = 2\pi i n_k, \tag{2.4.17}$$

где n_k — целое число. Далее, пусть Q_j и $\tilde{Q}_j$ — начало и конец отрезка b_j. Тогда

$$\int_{b_j} d\ln F^+ = \ln F^+(\tilde{Q}_j) - \ln F^+(Q_j) + 2\pi i m_j = \tag{2.4.18}$$

$$= \ln\theta(A(Q_j)+f_j-e) - \ln\theta(A(Q_j)-e) + 2\pi i m_j =$$

$$= -\frac{1}{2}B_{jj}+e_j-A_j(Q_j)+2\pi i m_j,$$

где m_j — целое число, $f_j=(B_{j1}, \ldots, B_{jg})$ — вектор решетки.

Выражение для ζ_j перепишется теперь в таком виде:

$$\zeta_j=e_j-\frac{1}{2}B_{jj}-A_j(Q_j)+\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int_{a_k}A_j\omega_k+ \tag{2.4.19}$$

$$+2\pi i m_j+\sum_k B_{jk}(-n_k+1).$$

Последние два слагаемых в формуле (2.4.19) можно выкинуть — это координаты некоторого вектора решетки. Чтобы избавиться от члена $A_j(Q_j)$, преобразуем интеграл $\int_{a_j} A_j\omega_j$. Имеем $A_j\omega_j=\frac{1}{2}d(A_j^2)$, поэтому

$$\int_{a_j}A_j\omega_j=\frac{1}{2}[A_j^2(Q_j)-A_j^2(R_j)],$$

где R_j — начало отрезка a_j, Q_j — его конец (совпадающий с началом отрезка b_j). Далее, $A_j(Q_j) = A_j(R_j) + 2\pi i$. Получаем

$$\int_{a_j}A_j\omega_j=\frac{1}{2}2\pi i\,(2A_j(Q_j)-2\pi i),$$

откуда

$$-A_j(Q_j)+\frac{1}{2\pi i}\sum_k\int_{a_k}A_j\omega_k=-\pi i+\frac{1}{2\pi i}\sum_{k\neq j}\int_{a_j}A_j\omega_k.$$

Лемма доказана

Замечание. Вектор римановых констант K просто связан с каноническим классом C поверхности Γ:

$$2K\equiv-A(C). \tag{2.4.20}$$

Поэтому при умелом выборе базисной точки P_0 выражение (2.4.14) упрощается (см. [4]).

Итак, если функция $\theta(A(P)-e)$ не равна тождественно нулю на Γ, то ее нули и дадут решение задачи обращения Якоби (2.4.1) для вектора $\zeta=e-K$. Сформулируем без доказательства следующий критерий тождественного зануления функции $\theta(A(P)-e)$ (см. [2], [4]).

Теорема 2.4.1. *Функция $\theta(A(P)-e)$ тождественно равна нулю на Γ, если и только если точка e допускает представление в виде*

$$e\equiv A(Q_1)+\ldots+A(Q_g)+K, \tag{2.4.21}$$

где дивизор $D=Q_1+\ldots+Q_g$ — специальный.

Напомним (см. выше § 3), что дивизор $D=Q_1+\ldots+Q_g$ называется специальным, если существует непостоянная мероморфная функция на Γ, полюсы которой могут лежать только в точках $Q_1,\ldots,Q_g$. Для дивизора D общего положения такой функции нет.

Теперь мы уже можем доказать следующее важное утверждение.

Теорема 2.4.2. *Пусть $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_g)$ — такой вектор, что функция $F(P)=\theta(A(P)-\zeta-K)$ не обращается тождественно в нуль на Γ. Тогда:*

а) *Функция $F(P)$ имеет на поверхности Γ g нулей $P_1,\ldots,P_g$, дающих решение задачи обращения Якоби*

$$A_j(P_1)+\ldots+A_j(P_g)=\sum_{k=1}^{g}\int_{P_0}^{P_k}\omega_j\equiv\zeta_j\qquad(j=1,\ldots,g). \tag{2.4.22}$$

б) *Дивизор $D=P_1+\ldots+P_g$ — неспециальный.*

в) *Точки $P_1,\ldots,P_g$ определяются из системы* (2.4.22) *однозначно с точностью до перестановки.*

Доказательство. Пункт а) сразу вытекает из лемм 2.4.1 и 2.4.2. Далее, если дивизор $D=P_1+\ldots+P_g$ — специальный, то из теоремы 2.4.1 вытекало бы, что $F(P)\equiv0$ — противоречие. Если $P_1',\ldots$ $\ldots,P_g'$ — другое решение задачи (2.4.22), то на многообразии Якоби $J(\Gamma)$ должно выполняться соотношение

$$A(P_1)+\ldots+A(P_g)\equiv A(P_1')+\ldots+A(P_g').$$

В силу теоремы Абеля это означает, что на Γ существует мероморфная функция, имеющая нули в точках $P_1',\ldots,P_g'$ и полюсы в точках $P_1,\ldots,P_g$. В силу неспециальности D такая функция должна быть константой и поэтому после перенумерации будем иметь $P_i=P_i'$. Теорема доказана.

Отметим полезное для дальнейшего

Следствие. *Для неспециального дивизора $D=P_1+\ldots+P_g$ степени g функция $F(P)=\theta(A(P)-A(D)-K)$ имеет на поверхности Γ ровно g нулей $P=P_1,\ldots,P=P_g$.*

Приведем также для справок информацию о нулях θ-функции на $J(\Gamma)$ (так называемый θ-*дивизор*).

Теорема 2.4.3. *Нули θ-функции $\theta(e) = 0$ допускают параметрическое представление в виде*

(2.4.23) $$e \equiv A(P_1) + \ldots + A(P_g) + K,$$

где $P_1, \ldots, P_{g-1}$ — набор из произвольных $g-1$ точек римановой поверхности Γ.

Доказательство. Пусть $\theta(e) = 0$. Положим $F(P) = \theta(A(P) - e)$. Возможны два случая.

1) $F(P) \neq 0$ на Γ. Тогда в силу теоремы 2.4.2 имеем

(2.4.24) $$e \equiv A(P_1) + \ldots + A(P_g) + K,$$

где набор точек $P_1, \ldots, P_g$ определен однозначно. В силу условия $\theta(e) = 0$ среди этих точек содержится точка P_0 (нижний предел в интегралах); пусть, скажем, $P_g = P_0$. Тогда $A(P_0) = 0$ и из (2.4.24) следует, что

$$e \equiv A(P_1) + \ldots + A(P_{g-1}) + K.$$

2) Пусть $F(P) \equiv 0$ на Γ. Тогда по теореме 2.4.1 можно представить e в виде

(2.4.25) $$e \equiv A(Q_1) + \ldots + A(Q_g) + K,$$

где дивизор $D = Q_1 + \ldots + Q_g$ — специальный. В силу специальности на Γ существует мероморфная функция f, имеющая полюсы в точках $Q_1, \ldots, Q_g$, такая, что $f(P_0) = 0$. Пусть $D' = P_1 + \ldots + P_{g-1} + P_0$ — дивизор нулей функции f. Тогда в силу теоремы Абеля $A(D') \equiv A(D)$. Подставляя в (2.4.25) $A(D')$ вместо $A(D)$ и снова используя равенство $A(P_0) = 0$, завершаем доказательство теоремы.

Уже отмечалось, что функция $F(P) = \theta(A(P) - e)$ (пусть $e = \zeta + K$) не обращается в тождественный нуль, если $\theta(e) \neq 0$. Нули θ-функции (точки θ-дивизора) образуют подмногообразие размерности $2g-2$ (при $g \geqslant 3$ с особенностями) в $2g$-мерном торе $J(\Gamma)$. Если выкинуть из $J(\Gamma)$ θ-дивизор, то получится связная $2g$-мерная область. Мы получаем, что для всех точек якобиана $J(\Gamma)$ задача обращения Якоби разрешима, притом для почти всех точек однозначно.

Таким образом, набор точек $(P_1, \ldots, P_g) = A^{-1}(\zeta)$ римановой поверхности Γ (без учета их порядка) является однозначной функцией от точки $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_g)$ якобиана $J(\Gamma)$ (имеющей «особенности» в точках θ-дивизора). Чтобы найти для этих функций аналитическое выражение, возьмем произвольную мероморфную на Γ функцию $f(P)$. Тогда задание величин $\zeta_1, \ldots, \zeta_g$ однозначно определяет совокупность значений

(2.4.26) $$f(P_1), \ \ldots, \ f(P_g), \quad (P_1, \ldots, P_g) = A^{-1}(\zeta).$$

Поэтому любая симметрическая функция от этих значений является однозначной мероморфной функцией от $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_g) \in J(\Gamma)$, т. е. абелевой функцией на якобиане $J(\Gamma)$ (см. § 3 главы 1). Все эти функции выражаются через θ-функцию Римана. Особенно просто выражаются следующие элементарные симметрические функции («многочлены Ньютона»):

(2.4.27) $$\sigma_s(\zeta) = \sum_{j=1}^{g} f^s(P_j) \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Для них из теоремы 2.4.2 и формулы вычетов получаем такое представление:

(2.4.28) $$\sigma_s(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial\widetilde{\Gamma}} f^s(P)\, d\ln\theta(A(P) - \zeta - K) - \sum_{f(Q_k)=\infty} \operatorname*{Res}_{P=Q_k} f^s(P)\, d\ln\theta(A(P) - \zeta - K).$$

(второе слагаемое справа есть сумма вычетов подынтегрального выражения по всем полюсам функции $f(P)$). Как и в доказательстве лемм 2.4.1, 2.4.2, можно преобразовать первое слагаемое в (2.4.28), пользуясь формулами (2.4.11), (2.4.12). Равенство (2.4.28) перепишется так:

$$\sigma_s(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{a_k} f^s(P)\,\omega_k - \sum_{f(Q_k)=\infty} \operatorname*{Res}_{P=Q_k} f^s(P)\, d\ln\theta(A(P)-\zeta-K). \tag{2.4.29}$$

Здесь первое слагаемое — константа, не зависящая от ζ. Вычисление второго слагаемого (суммы вычетов) мы разберем на двух примерах.

Пример 1. Γ — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g, заданная уравнением

$$w^2 = P_{2g+1}(z), \tag{2.4.30}$$

где $P_{2g+1}(z)$ — многочлен степени $2g+1$ без кратных корней. Рассмотрим следующую функцию на Γ: $f(w, z) = z$ (проекция на z-плоскость). Эта функция на Γ имеет единственный двукратный полюс в точке ветвления (т. е. точке Вейерштрасса) $z = \infty$. Получим аналитическое выражение для функций σ_1 и σ_2, построенных по формуле (2.4.27). Другими словами, если $P_1 = (w_1, z_1), \ldots, P_g = (w_g, z_g)$ — решение задачи обращения $A(P_1) + \ldots + A(P_g) = \zeta$, то

$$\sigma_1(\zeta) = z_1 + \ldots + z_g, \tag{2.4.31}$$

$$\sigma_2(\zeta) = z_1^2 + \ldots + z_g^2. \tag{2.4.32}$$

В качестве базисной точки P_0 (нижний предел интегралов в отображении Абеля) возьмем точку $z = \infty$. Согласно формуле (2.4.29) функции σ_1 и σ_2 имеют вид

$$\sigma_1(\zeta) = c_1 - \operatorname*{Res}_{z=\infty} z\, d\ln\theta(A(P) - \zeta - K), \tag{2.4.33}$$

$$\sigma_2(\zeta) = c_2 - \operatorname*{Res}_{z=\infty} z^2 d\ln\theta(A(P) - \zeta - K), \tag{2.4.34}$$

где c_1, c_2 — константы, зависящие только от римановой поверхности и выбора на ней базиса циклов. Вычислим вычет в (2.4.33). В качестве локального параметра в окрестности точки $z = \infty$ возьмем $\tau = 1/z$. Из определения отображения Абеля сразу получаем

$$d\ln\theta(A(P)-\zeta-K) = \sum_{i=1}^{g} [\ln\theta(A(P)-\zeta-K)]_i\, \omega_i(P) = \sum_{i=1}^{g} [\ln\theta(A(P)-\zeta-K)]_i\, f_i(\tau)\, d\tau, \tag{2.4.35}$$

где через $[\ldots]_i$ обозначена частная производная по i-й переменной, $\omega_i = f_i(\tau)d\tau$ $(i = 1, \ldots, g)$ — канонический базис голоморфных дифференциалов на Γ. Разложим вектор-функцию $A(P)$ в ряд по степеням τ (при $P \to \infty$). В силу выбора базисной точки $P_0 = \infty$ это разложение имеет вид

$$A(P) = \tau U + \tau^2 V + O(\tau^3), \tag{2.4.36}$$

где $U = (U_1, \ldots, U_g)$ и $V = (V_1, \ldots, V_g)$ — векторы, имеющие вид

$$U_k = \frac{dA_k(P)}{d\tau}\Big|_{P=\infty} = f_k(0), \tag{2.4.37}$$

$$V_k = \frac{1}{2}\frac{d^2A_k(P)}{d\tau^2}\Big|_{P=\infty} = \frac{1}{2}f'_k(0) \tag{2.4.38}$$

(напомним: значению $\tau = 0$ отвечает на Γ точка ∞).

Лемма 2.4.3. а) *Вектор U есть вектор b-периодов нормированного дифференциала второго рода с единственным двойным полюсом в точке $z = \infty$ и главной частью $d\tau/\tau^2$.*

б) *Вектор V равен нулю.*

Доказательство. а) сразу следует из леммы 2.1.2 (формула (2.1.21) при $n = 1$). Из той же леммы получаем, что вектор V (с точностью до несущественного множителя) есть вектор периодов дифференциала второго рода с полюсом третьего порядка в точке ∞. Но этот дифференциал точный — он равен $dz = -2d\tau/\tau^3$ и поэтому имеет нулевые периоды по всем циклам. Лемма доказана.

Итак, разложение (2.4.36) имеет вид

$$A(P) = \tau U + O(\tau^3). \tag{2.4.39}$$

Поэтому в окрестности точки ∞

$$\ln\theta(A(P) - \zeta - K) = \ln\theta(\zeta + K) - \tau\sum_j U_j[\ln\theta(\zeta+K)]_j$$

(мы воспользовались четностью θ-функции),

$$f_1(\tau) = U_i + O(\tau^2).$$

Отсюда для функции $\sigma_1(\zeta)$ получаем выражение

$$\sigma_1(\zeta) = \sum_{i,j} U_iU_j[\ln\theta(\zeta+K)]_{ij} + c_1. \tag{2.4.40}$$

Введем оператор $\partial/\partial x = \sum U_i\,\partial/\partial\zeta_i$ производной вдоль вектора U. Тогда выражение (2.4.40) перепишется в виде

$$\sigma_1(\zeta) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(\zeta+K) + c_1. \tag{2.4.41}$$

Аналогичное (но более длинное) вычисление вычета в формуле (2.4.34) приводит к следующему выражению для функции σ_2:

$$\sigma_2(\zeta) = \left(-\frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x\,\partial t} - \frac{1}{6}\frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)\ln\theta(\zeta+K) + c_2. \tag{2.4.42}$$

Здесь $\partial/\partial t = \sum W_i\partial/\partial\zeta_i$ — оператор дифференцирования вдоль вектора $W = (W_1, \ldots, W_g)$, где

$$W_k = \frac{1}{3}f''_k(0). \tag{2.4.43}$$

Из леммы 2.1.2 вытекает, что вектор W есть вектор b-периодов нормированного дифференциала второго рода с единственным полюсом четвертого порядка в ∞ с главной частью $3d\tau/\tau^4$.

Формулы (2.4.41), (2.4.42) дают полное решение задачи обращения Якоби для римановых поверхностей рода 2 (все эти поверхности гиперэллиптичны).

В главе 3 будет показано, что функция $u = 2\sigma_1$ есть решение уравнения Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right).$$

Пользуясь этим уравнением, легко преобразовать формулу (2.4.42) к виду

$$(2.4.42') \qquad \sigma_2(\zeta) = -2\sigma_1^2(\zeta) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\sigma_1(\zeta)}{\partial x^2} + \tilde{c}_2,$$

где входят только операторы дифференцирования по x-направлению.

Замечание. Напомним, что базисные голоморфные дифференциалы $\omega_1, \ldots, \omega_g$ на римановой поверхности (2.4.30) имеют вид

$$(2.4.44) \qquad \omega_k = \frac{c_{k1}z^{g-1} + c_{k2}z^{g-2} + \ldots + c_{kg}}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}}\, dz.$$

Здесь матрица c_{jk} имеет вид $(c_{jk}) = 2\pi i (A_{jk})^{-1}$, где

$$(2.4.45) \qquad A_{jk} = \oint\limits_{a_j} \frac{z^{k-1}\, dz}{\sqrt{P_{2g+1}(z)}} \qquad (j, k = 1, \ldots, g).$$

Поэтому вектор $(U_1, \ldots, U_g)$ (см. выше) имеет такие координаты:

$$(2.4.46) \qquad U_k = -2c_{k1}.$$

Аналогичное выражение для вектора W мы не приводим.

Пример 2. Пусть теперь гиперэллиптическая поверхность Γ рода g задана уравнением

$$(2.4.47) \qquad w^2 = P_{2g+2}(z).$$

Снова рассмотрим функцию $f(w, z) = z$ и построенную по ней функцию $\sigma_1(\zeta)$ (сумму проекций на z-плоскость). В этом случае поверхность Γ имеет две бесконечно удаленные точки: $P_+ = (\infty, +)$ и $P_- = (\infty, -)$, в каждой из которых функция z имеет простой полюс. Формула (2.4.29) для функции σ_1 запишется в виде

$$(2.4.48) \qquad \sigma_1(\zeta) = c_1 - [\operatorname*{Res}_{P=P_+} + \operatorname*{Res}_{P=P_-}]\, z d \ln\theta(A(P) - \zeta - K).$$

В качестве локального параметра в обеих точках P_+, P_- можно взять $\tau = 1/z$. Голоморфные дифференциалы $\omega_1, \ldots, \omega_g$ здесь имеют вид

$$(2.4.49) \qquad \omega_k = \frac{c_{k1}z^{g-1} + \ldots + c_{kg}}{\sqrt{P_{2g+2}(z)}}\, dz.$$

Пусть $\omega_k = f_k^+(\tau)d\tau$ в окрестности точки P_+ (значению $\tau = 0$ отвечает точка P_+) и $\omega_k = f_k^-(\tau)d\tau$ в окрестности точки P_- (значению $\tau = 0$ отвечает точка P_-). Из (2.4.49) следует, что

$$(2.4.50) \qquad f_k^-(0) = -f_k^+(0).$$

Обозначим $f_k^+(0)$ через U_k $(k = 1, \ldots, g)$.

Вычисление вычетов в формуле (2.4.48), подобное разобранному в примере 1, дает

$$(2.4.51) \qquad \sigma_1(\zeta) = c_1 + \sum U_i \left[\ln \frac{\theta(\zeta + K - A(P_+))}{\theta(\zeta + K - A(P_-))}\right]_i.$$

Введя оператор $\partial/\partial x = \sum U_i \partial/\partial\zeta_i$ дифференцирования по направлению вектора $U = (U_1, \ldots, U_g)$, получим окончательно

$$(2.4.52) \qquad \sigma_1(\zeta) = \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{\theta(\zeta + K - A(P_+))}{\theta(\zeta + K - A(P_-))} + c_1;$$

c_1 — константа. Компоненты вектора U суть периоды нормированного дифференциала второго рода с двойным полюсом в точке P_+ — это следует из леммы 2.1.2.

Изложенный выше метод решения задачи обращения Якоби принадлежит Риману. Упомянем здесь также о подходе Вейерштрасса, который исследовал систему дифференциальных уравнений, получающуюся из (2.4.1) дифференцированием. Разберем только случай рода $g = 2$, где поверхность Γ задана уравнением

$$w^2 = P_5(z). \tag{2.4.53}$$

В качестве базиса голоморфных дифференциалов (ненормированного) возьмем такие дифференциалы

$$\omega_1 = \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}}, \quad \omega_2 = \frac{z\,dz}{\sqrt{P_5(z)}}. \tag{2.4.54}$$

Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz_1}{dx} = \frac{\sqrt{P_5(z_1)}}{z_1 - z_2}, \quad \frac{dz_2}{dx} = \frac{\sqrt{P_5(z_2)}}{z_2 - z_1}; \tag{2.4.55}$$

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{z_2\sqrt{P_5(z_1)}}{z_1 - z_2}, \quad \frac{dz_2}{dt} = \frac{z_1\sqrt{P_5(z_2)}}{z_2 - z_1}. \tag{2.4.56}$$

Каждая из этих систем определяет закон движения пары точек

$$P_1 = \left(z_1, \sqrt{P_5(z_1)}\right), \quad P_2 = \left(z_2, \sqrt{P_5(z_2)}\right)$$

по римановой поверхности Γ. Имеет место простая

Лемма 2.4.4. *При отображении Абеля* $S^2\Gamma \xrightarrow{A} J(\Gamma)$,

$$(P_1 = (z_1, \sqrt{P_5(z_1)}), \quad P_2 = (z_2, \sqrt{P_5(z_2)})) \mapsto (\zeta_1, \zeta_2),$$

где

$$\begin{cases} \zeta_1 = \displaystyle\int_{P_0}^{P_1} \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{dz}{\sqrt{P_5(z)}}, \\ \zeta_2 = \displaystyle\int_{P_0}^{P_1} \frac{z\,dz}{\sqrt{P_5(z)}} + \int_{P_0}^{P_2} \frac{z\,dz}{\sqrt{P_5(z)}} \end{cases} \tag{2.4.57}$$

(P_0 — *фиксированная точка*), *обе системы* (2.4.55), (2.4.56) *переходят в системы с постоянными коэффициентами*

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = 0, \quad \frac{d\zeta_2}{dx} = 1; \tag{2.4.58}$$

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = -1, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} = 0. \tag{2.4.59}$$

Таким образом, отображение Абеля (2.4.57) есть просто замена переменных, интегрирующая уравнения (2.4.55), (2.4.56).

Доказательство леммы. Имеем

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = \frac{dz_1/dx}{\sqrt{P_5(z_1)}} + \frac{dz_2/dx}{\sqrt{P_5(z_2)}} = \frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_2 - z_1} = 0,$$

$$\frac{d\zeta_2}{dx} = \frac{z_1}{z_1 - z_2} + \frac{z_2}{z_2 - z_1} = 1;$$

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{z_2}{z_1 - z_2} + \frac{z_1}{z_2 - z_1} = -1,$$

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \frac{z_1 z_2}{z_1 - z_2} + \frac{z_2 z_1}{z_2 - z_1} = 0.$$

Лемма доказана.

В силу (2.4.58), (2.4.59) переменные x, t являются (комплексными) координатами на торе Якоби $T^4 = J(\Gamma)$. Поэтому интегрирование систем (2.4.55), (2.4.56) $P_1 = P_1(x, t)$, $P_2 = P_2(x, t)$ дает решение задачи обращения Якоби.

Отметим, что эти системы легко интегрируются в квадратурах (см. явные формулы в обзоре [17]). Выражение их решений через θ-функцию поверхности Г можно получить из формул примера 1 (см. выше).

ГЛАВА 3

ФУНКЦИЯ БЕЙКЕРА — АХИЕЗЕРА. ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЯМ

§ 1. Одноточечная функция Бейкера — Ахиезера. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили и уравнения, связанные с ним

Пусть Г — риманова поверхность рода g. Фиксируем на Г некоторую точку Q и локальный параметр $z = z(P)$ в окрестности этой точки (пусть значению $z = 0$ отвечает сама точка Q, $z(Q) = 0$). Удобно ввести обратную величину $k = 1/z$, $k(Q) = \infty$. Пусть, далее, задан произвольный многочлен $q(k)$.

Определение 3.1.1. Пусть $D = P_1 + \ldots + P_g$ — положительный дивизор степени g на Г. *Функцией Бейкера — Ахиезера* на поверхности Г, отвечающей точке Q, локальному параметру в ней $z = 1/k$, многочлену $q(k)$ и дивизору D, называется функция $\psi(P)$ такая, что:

а) $\psi(P)$ мероморфна на поверхности Г всюду, кроме точки $P = Q$, имеет на $\Gamma\setminus Q$ полюсы лишь в точках $P_1, \ldots, P_g$ дивизора D (более точно, дивизор полюсов $\psi \mid_{\Gamma\setminus Q} \geqslant -D$; см. § 3 главы 2)

б) В окрестности точки $P = Q$ произведение $\psi(P) \exp[-q(k)]$ аналитично.

Вместо условия б) будем говорить также, что функция $\psi(P)$ имеет в точке $P = Q$ существенную особенность вида $\psi(P) \sim c\cdot \exp q(k)$ (c — константа). Такие функции Бейкера — Ахиезера образуют для данного дивизора D линейное пространство (точку Q, локальный параметр $1/k$ и многочлен $q(k)$ мы фиксируем). Обозначим это пространство через $\Lambda(D)$ (по аналогии с рассмотренным в § 3 главы 2 пространством $L(D)$).

Теорема 3.1.1. *Пусть дивизор $D = P_1 + \ldots + P_g$ степени g — неспециальный. Тогда пространство $\Lambda(D)$ для многочлена q общего положения одномерно.*

Другими словами, для неспециального дивизора D и общего многочлена $q(k)$ условия определения 3.1.1 задают функцию Бейкера — Ахиезера однозначно с точностью до умножения на константу.

Доказательство. а) Единственность. Функция Бейкера — Ахиезера имеет на $\Gamma\setminus\infty$ g нулей, причем для общего многочлена $q(k)$ дивизор нулей $\tilde{D}$ также неспециальный. Пусть теперь $\psi(P), \tilde{\psi}(P)$ — две функции Бейкера — Ахиезера отвечающие одному дивизору D. Тогда их отношение $\psi(P)/\tilde{\psi}(P)$ будет мероморфной функцией на Г (существенная особенность сократится) с полюсами в точках дивизора $\tilde{D}$. Такая функция обязана быть константой в силу неспециальности этого дивизора.

б) Существование. Пусть Ω — дифференциал второго рода на Г с главной частью в точке Q вида $dq(k)$, нормированный условиями

$$\oint_{a_j} \Omega = 0 \qquad (j = 1, \ldots g). \tag{3.1.1}$$

Пусть $U = (U_1, \ldots, U_g)$ — его вектор b-периодов:

$$U_k = \oint_{b_k} \Omega. \tag{3.1.2}$$

Фиксируем произвольную точку $P_0 \neq Q$ поверхности Г, возьмем соответствующее отображение Абеля $A(P)$ и построим функцию

$$\psi(P) = \exp\left(\int_{P_0}^{P} \Omega\right) \frac{\theta(A(P) - A(D) + U - K)}{\theta(A(P) - A(D) - K)}, \tag{3.1.3}$$

где D — заданный неспециальный дивизор. Поясним: путь интегрирования в интеграле $\int_{P_0}^{P} \Omega$ и в отображении Абеля $A(P) = \left(\int_{P_0}^{P} \omega_1, \ldots, \int_{P_0}^{P} \omega_g\right)$ выбирается один и тот же.

Покажем, что (3.1.3) — нужная функция Бейкера — Ахиезера. Проверим сначала ее однозначность на Г. Если взять другой путь интегрирования, ведущий из P_0 в P, то к интегралу $\int_{P_0}^{P} \Omega$ добавится слагаемое вида $\oint_{\gamma} \Omega$, где γ — замкнутый контур (цикл). Аналогично, к $A(P)$ добавится вектор $\left(\oint_{\gamma} \omega_1, \ldots, \oint_{\gamma} \omega_g\right)$. Разложим цикл γ по базисным циклам:

$$\gamma = \sum_{k=1}^{g} n_k a_k + \sum_{j=1}^{g} m_j b_j, \tag{3.1.4}$$

где числа n_k, m_j — целые. Тогда при замене пути интегрирования будем иметь

$$\int_{P_0}^{P} \Omega \to \int_{P_0}^{P} \Omega + \sum m_j U_j = \int_{P_0}^{P} \Omega + \langle M, U \rangle, \tag{3.1.5}$$

$$A(P) \mapsto A(P) + 2\pi i N + BM. \tag{3.1.6}$$

Здесь $M = (m_1, \ldots, m_g)$, $N = (n_1, \ldots, n_g)$ — целочисленные векторы. При таком преобразовании, согласно формуле (1.1.6), отношение θ-функций умножится на

$$\frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\langle BM, M\rangle - \langle M, A(P) - A(D) + U - K\rangle\right]}{\exp\left[-\frac{1}{2}\langle BM, M\rangle - \langle M, A(P) - A(D) - K\rangle\right]} = \exp(-\langle M, U\rangle),$$

а экспоненциальный член приобретет обратный множитель $\exp\langle M, U\rangle$. Однозначность доказана.

Далее, в силу неспециальности дивизора $D = P_1 + \ldots + P_g$ полюсы функции (3.1.3) (возникающие из-за нулей знаменателя) лежат как раз в точках $P_1, \ldots, P_g$ — см. следствие из теоремы 2.4.2. Кроме того, функция (3.1.3) имеет существенную особенность нужного вида в силу выбора Ω: в окрестности точки Q $\Omega = dq(k) + \ldots$, $\int \Omega = q(k) + \ldots$ (многоточием обозначены правильные члены). Теорема доказана.

Разберем более детально функцию Бейкера — Ахиезера, построенную по многочлену

$$q(k) = kx + k^2 y + k^3 t, \tag{3.1.7}$$

где x, y, t — параметры. Обозначим такую функцию, отвечающую некоторому неспециальному дивизору D степени g, через $\psi(x, y, t; P)$. Функцию $\psi(x, y, t; P)$ можно нормировать так, что в окрестности точки Q ее разложение имеет вид

$$\psi(x, y, t; P) = e^{kx+k^2y+k^3t}\left(1+\frac{\xi_1}{k}+\frac{\xi_2}{k^2}+\ldots\right). \tag{3.1.8}$$

Здесь коэффициенты ξ_1, ξ_2, ... являются некоторыми функциями от x, y, t (мы их вычислим ниже).

Отвлечемся на время от римановых поверхностей и будем смотреть на разложение (3.1.8) как на формальное (не интересуясь его сходимостью). Имеет место простая, но важная

Лемма 3.1.1. *Для функции ψ вида (3.1.8) справедливы формальные равенства*

$$\left[-\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u\right]\psi = O\left(\frac{1}{k}\right)e^{kx+k^2y+k^3t}, \tag{3.1.9}$$

$$\left[-\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}+w\right]\psi = O\left(\frac{1}{k}\right)e^{kx+k^2y+k^3t}, \tag{3.1.10}$$

где функции u и w могут быть найдены из условия обращения в нуль коэффициентов при $k^ne^{kx+k^2y+k^3t}$ при $n = 3, 2, 1, 0$. Эти функции имеют вид

$$u = -2\frac{\partial\xi_1}{\partial x}, \tag{3.1.11}$$

$$w = 3\xi_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x}+3\frac{\partial^2\xi_1}{\partial x^2}-3\frac{\partial\xi_2}{\partial x}. \tag{3.1.12}$$

Доказательство заключается в прямом вычислении.

Обозначим через L и A полученные обыкновенные дифференциальные операторы по x:

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+u, \tag{3.1.13}$$

$$A = \frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}+w. \tag{3.1.14}$$

Теорема 3.1.2. *Пусть $\psi = \psi(x, y, t; P)$ — функция Бейкера — Ахиезера, построенная по многочлену $q(k) = kx + k^2y + k^3t$ и отвечающая некоторому неспециальному дивизору D степени g. Тогда ψ есть решение системы уравнений*

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = L\psi, \tag{3.1.15}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = A\psi, \tag{3.1.16}$$

где операторы L, A задаются формулами (3.1.13), (3.1.14).

Доказательство. Функции $\varphi_1 = \left(-\frac{\partial}{\partial y}+L\right)\psi$ и $\varphi_2 = \left(-\frac{\partial}{\partial t}+A\right)\psi$ удовлетворяют всем условиям определения функции Бейкера — Ахиезера. Но из леммы 3.1.1 следует, что значения произведений $\varphi_1 \exp(-kx - k^2y - k^3t)$ и $\varphi_2 \exp(-kx - k^2y - k^3t)$ в точке Q равны нулю. В силу единственности функции Бейкера — Ахиезера (теорема 3.1.1) отсюда вытекает, что $\varphi_1 = \varphi_2 \equiv 0$ на Γ. Теорема доказана.

Следствие. *Функции u и w вида* (3.1.11), (3.1.12) *дают решение системы нелинейных уравнений*

$$(3.1.17)\qquad \begin{cases} \frac{3}{2}u_y+\frac{3}{2}u_{xx}-2w_x=0,\\ w_y-u_t+u_{xxx}+\frac{3}{2}uu_x-w_{xx}=0.\end{cases}$$

Исключая из этой системы w, мы приходим к известному уравнению Кадомцева — Петвиашвили (КП)

$$(3.1.18)\qquad \frac{3}{4}u_{yy}=\frac{\partial}{\partial x}\left[u_t-\frac{1}{4}(6uu_x+u_{xxx})\right].$$

Доказательство следствия. Условие совместности уравнений $\partial\psi/\partial y = L\psi$ и $\partial\psi/\partial t = A\psi$ имеет вид

$$(3.1.19)\qquad \left[-\frac{\partial}{\partial y}+L,\ -\frac{\partial}{\partial t}+A\right]=0.$$

(Через $[\ldots,\ldots]$ обозначен коммутатор операторов.) Вычисляя этот коммутатор, мы и получаем систему (3.1.17).

Итак, по каждой римановой поверхности Γ рода g, точке Q на ней, локальному параметру k^{-1} в окрестности точки Q мы построим семейство решений уравнения КП, параметризованных неспециальными дивизорами степени g на Γ (точками общего положения якобиана $J(\Gamma)$).

Замена локального параметра

$$(3.1.20)\qquad k\mapsto \lambda k+a+\frac{b}{k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

(λ, a, b — произвольные комплексные числа, $\lambda\neq 0$) приводит к другому семейству решений того же уравнения КП. Легко проверить, что эти другие решения получаются при помощи следующих преобразований, сохраняющих вид уравнения КП:

$$(3.1.21)\qquad \begin{cases} x\mapsto \lambda x+2\lambda ay+(3\lambda a^2+3\lambda^2 b)\,t,\\ y\to \lambda^2 y+3\lambda^2 at,\\ t\mapsto \lambda^3 t,\\ u\mapsto \frac{1}{\lambda^2}u-\frac{2b}{\lambda}.\end{cases}$$

Разумеется, наличие у уравнения КП группы преобразований вида (3.1.21) есть тривиально проверяемый факт (вне связи с теорией θ-функций).

Выразим построенные решения через θ-функцию поверхности Γ. Для этого используем формулу (3.1.3) для функции Бейкера — Ахиезера, которая в нашем случае примет такой вид:

$$(3.1.22)\qquad \psi(x,y,t;P)=\exp\left(x\int_{P_0}^{P}\Omega^{(1)}+y\int_{P_0}^{P}\Omega^{(2)}+t\int_{P_0}^{P}\Omega^{(3)}\right)\times$$
$$\times\frac{\theta(A(P)-A(D)+xU+yV+tW-K)}{\theta(A(P)-A(D)-K)}.$$

Здесь $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, $\Omega^{(3)}$ — нормированные дифференциалы второго рода с полюсами только в точке Q и с главными частями в этой точке вида

$$(3.1.23)\qquad \Omega^{(1)}=dk+\ldots,\quad \Omega^{(2)}=d(k^2)+\ldots,\quad \Omega^{(3)}=d(k^3)+\ldots$$

(многоточием обозначены правильные члены; k^{-1} — локальный параметр); U, V, W — их векторы b-периодов:

$$(3.1.24)\qquad U_i=\oint_{b_i}\Omega^{(1)},\quad V_i=\oint_{b_i}\Omega^{(2)},\quad W_i=\oint_{b_i}\Omega^{(3)}\qquad (i=1,\ldots,g).$$

Теорема 3.1.3. *Построенные решения уравнения КП имеют вид*

$$(3.1.25)\qquad u(x,y,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(xU+yV+tW+z_0)+c,$$

где $\theta=\theta(z)$ — θ-*функция римановой поверхности* Γ, *векторы* U, V, W *определены формулами* (3.1.24), $z_0=-A(D)-K$ — *произвольный вектор*, c — *константа*.

Доказательство. В силу формулы (3.1.11) достаточно найти коэффициент ξ_1 разложения (3.1.8). Заметим, что разложение логарифма функции Бейкера — Ахиезера (не обязательно нормированной) имеет вид

$$(3.1.26)\qquad \ln\psi=kx+k^2y+k^3t+\xi_0+\frac{\xi_1+cx+ay+bt}{k}+\ldots$$

(ξ_0 — некоторая функция от x, y, t; a, b, c — константы). Следовательно, $\xi_1+cx+ay+bt$ — это коэффициент при $1/k$ в разложении функции

$$\varphi(P)=\ln\frac{\theta(A(P)-A(D)-K+xU+yV+tW)}{\theta(A(P)-A(D)-K)}$$

в окрестности точки $P=Q$. Вспомним, далее, что из соотношения (2.1.21) вытекает, что вектор-функция $A(P)$ при $P\to Q$ имеет такое разложение:

$$(3.1.27)\qquad A(P)=A(Q)-\frac{1}{k}U+O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Выберем Q начальной точкой отображения Абеля. Тогда $A(Q)=0$ и искомый коэффициент ξ_1 имеет вид

$$(3.1.28)\qquad \xi_1+cx+ay+bt=-\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta(xU+yV+tW-A(D)-K)+\ldots,$$

где многоточием обозначены члены, не зависящие от x, y, t. Из формулы $u=-2(\partial\xi_1/\partial x)$ и получаем доказательство теоремы.

Из формулы (3.1.25) вытекает дополнительная информация о свойствах построенных решений уравнения КП: функция $u(x,y,t)$ является условно периодической (вообще говоря, мероморфной) функцией переменных x, y, t. В самом деле, вторая логарифмическая производная $(\partial^2/\partial x^2)\ln\theta(z)$ (z — точка якобиана $J(\Gamma)$) — это мероморфная функция на торе $J(\Gamma)$ (абелева функция). Чтобы получить решение $u(x,y,t)$, нужно ограничить эту функцию на прямолинейную $x-y-t$ обмотку, натянутую на векторы U, V, W. Вопросом о выделении среди полученных решений вещественных и ограниченных мы здесь заниматься не будем.

Если для вектора U выполнены соотношения соизмеримости

$$(3.1.29)\qquad TU=2\pi i(n_1e_1+\ldots+n_ge_g)+m_1f_1+\ldots+m_gf_g,$$

где $2\pi ie_1,\ldots,2\pi e_g$, $f_1,\ldots,f_g$ — базисные векторы решетки периодов, n_k, m_j — целые числа, $T\neq 0$, то функция $u(x,y,t)$ будет периодической по x с периодом T. Если, кроме того, найдется второй (комплексный) период T', где $\mathrm{Im}(T'/T)\neq 0$, такой, что

$$(3.1.30)\qquad T'(U)=2\pi i(n_1'e_1+\ldots+n_g'e_g)+m_1'f_1+\ldots+m_g'f_g,$$

n_k', m_j' — целые числа, то $u(x,y,t)$ как функция от x будет двоякопериодической мероморфной функцией (с периодами T, T') и выразится через эллиптические функции.

Пример (см. [53]). Для римановой поверхности Г рода 2, задаваемой уравнением

$$w^2 = z^5 - \frac{21}{4} g_2 z^3 - \frac{27}{4} g_3 z^2 + \frac{27}{4} g_2^2 z + \frac{81}{4} g_2 g_3, \tag{3.1.31}$$

и $Q = \infty$ — точки Вейерштрасса на Г зависимость от y исчезает и уравнение КП сводится к уравнению КдФ (см. ниже), решение которого выражается через эллиптические функции по формулам

$$u(x, t) = 2\wp(x - x_1(t)) + 2\wp(x - x_2(t)) + 2\wp(x - x_3(t)). \tag{3.1.32}$$

Здесь $\wp(x)$ — функция Вейерштрасса (см. § 3 главы 1),

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3, \quad x_1 + x_2 + x_3 = \mathrm{const}, \quad -4t = \int_0^{x_1 - x_2} \frac{dz}{\sqrt{12(g_2 - 3\wp^2(z))}},$$

$$x_2 - x_3 = \frac{1}{2}\wp^{-1}\left[-\wp(x_1 - x_3) + \sqrt{g_2 - 3\wp^2(x_1 - x_3)}\right].$$

В частности, если $t = 0$, $\mathrm{const} = 0$, то $u(x, 0) = 6\wp(x)$. Красивый метод отыскания римановых поверхностей, для которых функция $u = 2\partial^2/\partial x^2 \ln \theta$ выражается через эллиптические, найден недавно И. М. Кричевером [22].

Пусть риманова поверхность Г и точка Q на ней таковы, что существует мероморфная на Г функция $\lambda(P)$ с единственным двойным полюсом в точке Q. Легко видеть, что тогда поверхность Г обязана быть гиперэллиптической, а Q — точкой Вейерштрасса на ней (точкой ветвления). Выберем в качестве локального параметра $k^{-1} = k^{-1}(P)$ в окрестности точки $P = Q$ величину $k^{-1}(P) = [\lambda(P)]^{-1/2}$. Тогда функция Бейкера — Ахиезера $\psi(x, y, t; P)$ с существенной особенностью в точке Q вида $\exp(kx + k^2y + k^3t)$ имеет вид

$$\psi(x, y, t; P) = \exp(y\lambda(P)\varphi(x, t; P)), \tag{3.1.33}$$

где φ — функция Бейкера — Ахиезера с тем же дивизором полюсов, что и ψ, и с существенной особенностью в точке Q вида $\varphi \sim \exp(kx + k^3t)$. Это сразу вытекает из теоремы единственности 3.1.1. Тогда дифференциальные уравнения (3.1.15), (3.1.16) перепишутся для функции φ так:

$$L\varphi(x, t; P) = \lambda(P)\varphi(x, t; P), \tag{3.1.34}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = A\varphi. \tag{3.1.35}$$

Соотношение (3.1.34) означает, что φ —«собственная функция» оператора Шрёдингера (Штурма — Лиувилля) L с собственным значением $\lambda(P)$ [1]), зависящая от параметра t в силу уравнения (3.1.35). Коэффициенты операторов L, A не будут зависеть от y, а уравнение КП превратится в уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ)

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}). \tag{3.1.36}$$

Условие коммутации (3.1.19) даст «L — A пару» для уравнения КдФ:

$$\frac{dL}{dt} = [A, L], \tag{3.1.37}$$

[1]) При наложении на риманову поверхность Г и дивизор D на ней надлежащих условий вещественности потенциал u оператора Шрёдингера будет вещественной почти-периодической функцией. Оператор L является в этом случае оператором с *правильными аналитическими свойствами*, т. е. обладает собственной функцией φ, мероморфной на римановой поверхности Г (см. [17]).

и, наконец, выражение (3.1.25) даст известную формулу (Матвеева — Итса) для конечно-зонных решений этого уравнения:

$$u(x, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta (xU + tW + z_0) + c, \tag{3.1.38}$$

где векторы U, W были определены выше.

Аналогично, если для кривой Γ и точки Q на ней существует мероморфная функция $\mu(P)$ с единственным полюсом третьего порядка в точке Q, то исчезнет зависимость от t и уравнение КП превратится в вариант уравнения нелинейной струны (уравнение Буссинеска)

$$3u_{yy} + \frac{\partial}{\partial x}(6uu_x + u_{xxx}) = 0, \tag{3.1.39}$$

имеющий решения вида

$$u(x, y) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta (xU + yV + z_0) + c. \tag{3.1.40}$$

Укажем набор условий, достаточных для вещественности построенных решений уравнения

$$-\frac{3}{4} u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left[u_t - \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx})\right], \tag{3.1.41}$$

получающегося из КП заменой $y \mapsto iy$. Пусть на поверхности Γ рода $g = 2\rho + n - 1$ задана антиинволюция τ (т. е. антиголоморфный автоморфизм $\tau\colon \Gamma \to \Gamma$, $\tau^2 = 1$), имеющая n неподвижных циклов $A_0, \ldots, A_{n-1}$. При разрезании Γ по циклам $A_0, \ldots, A_{n-1}$ получаются две связные компоненты Γ^+ и $\Gamma^- = \tau(\Gamma^+)$, каждая из которых есть открытая риманова поверхность рода ρ с краем, состоящим из циклов $A_0, \ldots, A_{n-1}$. В группе гомологий $H_1(\Gamma; \mathbb{Z})$ можно тогда выбрать канонический базис циклов

$$a_1, b_1, \ldots, a_\rho, b_\rho, a_{\rho+1}, b_{\rho+1}, \ldots, a_{\rho+n-1}, b_{\rho+n-1}, a_1', b_1', \ldots, a_\rho', b_\rho'$$

такой, что $a_{\rho+k} = A_k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$, причем

$$a_i,\ b_i \in \Gamma^+,\ a_i',\ \ b_i' \in \Gamma^-;\quad \tau(a_i) = a_i',\quad \tau(b_i) = -b_i' \quad (i = 1, \ldots, \rho),$$

$$\tau(a_{\rho+k}) = a_{\rho+k},\quad \tau(b_{\rho+k}) = -b_{\rho+k} \quad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Для получения вещественных решений существенную особенность Q функции Бейкера — Ахиезера нужно выбрать неподвижной относительно τ, $\tau(Q) = Q$, причем локальный параметр z в окрестности Q (где $z(Q) = 0$) надо взять таким, чтобы $\tau(z) = -\bar{z}$. Такие точка Q и локальный параметр z определят векторы U, V, W (см. выше). Тогда гладкие вещественные решения уравнения (3.1.41) имеют вид

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln \theta(xU + iyV + tW + z_0) + c, \tag{3.1.42}$$

где вектор z_0 имеет вид

$$z_0 = (z_0', z_0'', \bar{z}_0'),\qquad z_0' \in \mathbb{C}^\rho,\ \ z_0'' \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{3.1.42$'$}$$

c — вещественная константа (это можно вывести, например, из [8]).

З а м е ч а н и е. Функция Бейкера — Ахиезера $\psi(x, y, t; P)$, имеющая на $\Gamma \setminus Q$ полюсы, имеет там и g нулей (для почти всех x, y, t). Эти нули зависят от параметров x, y, t. Обозначим их через $Q_1(x, y, t), \ldots, Q_g(x, y, t)$. Зависимость этих нулей от x, y, t может быть определена, исходя из такого утверждения (Н. И. Ахиезер).

Л е м м а 3.1.2. *Для нулей $Q_1 = Q_1(x, y, t), \ldots, Q_g = Q_g(x, y, t)$ и полюсов $P_1, \ldots, P_g$ функции Бейкера — Ахиезера $\psi(x, y, t; P)$ справедливо* *следующее соотношение на якобиане* $J(\Gamma)$:

$$(3.1.43)\qquad A(Q_1)+\ldots+A(Q_g)\equiv A(P_1)+\ldots+A(P_g)+Ux+Vy+Wt,$$

где векторы U, V, W *определены выше.*

Доказательство леммы почти дословно повторяет доказательство теоремы Абеля. Периоды мероморфного дифференциала $d\ln\psi$ должны быть целыми кратными $2\pi i$. Этот дифференциал может быть представлен в виде линейной комбинации элементарных (см. § 1 главы 2):

$$(3.1.44)\qquad d\ln\psi=\sum_{i=1}^{g}\omega_{Q_iP_i}+x\Omega_Q^{(1)}+y\Omega_Q^{(2)}+t\Omega_Q^{(3)}+\sum_{i=1}^{g}c_i\omega_i.$$

Интегрируя это выражение по всем циклам a_j, b_k, и получаем соотношение (3.1.43).

Из этой леммы можно извлечь другое доказательство теоремы 3.1.1.

Дифференцируя соотношение (3.1.43) по x, y, t, мы получим дифференциальные уравнения, описывающие динамику нулей $(Q_1,\ldots,Q_g)$. Например, для гиперэллиптической поверхности Γ рода 2 $\{w^2=P_5(z)\}$ и точки Вейерштрасса $Q=\infty$ на ней зависимость нулей (Q_1, Q_2) от x определяется системой (2.4.55) (с точностью до множителя 2), зависимость от y исчезает, а зависимость от t дается линейной комбинацией систем (2.4.55) и (2.4.56).

Мы закончим этот параграф следующим общим наблюдением. Многочлен $q(k)=kx+k^2y+k^3t$, по которому строилась функция Бейкера — Ахиезера, был простейшим из возможных. Легко обобщить проделанные выкладки и доказать такое утверждение.

Теорема 3.1.4. *Пусть* Γ *— риманова поверхность рода* g; Q *— точка на ней;* k^{-1} *— локальный параметр в окрестности этой точки. Фиксируем неспециальный дивизор* D *степени* g. *Тогда:*

а) *Каждый многочлен* $q(k)$ *степени* n *определяет обыкновенный дифференциальный оператор* L_q *(по* x*)* n*-го порядка по следующему правилу. Пусть* $\psi_q=\psi_q(x,\ y;\ P)$ *— функция Бейкера — Ахиезера с дивизором полюсов* D *и существенной особенностью вида* $\exp(kx+q(k)y)$ *в точке* Q. *Тогда оператор* L_q *однозначно определяется из требования, чтобы выполнялось уравнение*

$$(3.1.45)\qquad \frac{\partial\psi_q}{\partial y}=L_q\psi_q.$$

Коэффициенты оператора L_q *могут быть выражены рекуррентно через коэффициенты ряда* $\psi_q\exp(-kx-q(k)y)$ *по обратным степеням* k.

б) *Каждая пара многочленов* $q(k)$, $r(k)$ *порождает решение нелинейного уравнения на коэффициенты операторов* L_q, L_r *вида*

$$(3.1.46)\qquad \left[-\frac{\partial}{\partial y}+L_q,\ -\frac{\partial}{\partial t}+L_r\right]=0.$$

Это решение выражается через θ*-функцию поверхности* Γ.

в) *В частности, каждая мероморфная функция* $\lambda(P)$ *с единственным полюсом в точке* $P=Q$ *порождает оператор вида* $L=L_\lambda$ *и семейство его собственных функций* ψ,

$$(3.1.47)\qquad L\psi=\lambda\psi,$$

если в качестве многочлена $q(k)$ *взять главную часть лорановского ряда этой функции в точке* Q, $L=L_q$. *В этом случае любой другой многочлен* $r(k)$ *определяет решение нелинейного уравнения на коэффициенты оператора* L *вида*

$$(3.1.48)\qquad \frac{\partial L}{\partial t}=[A,\ L],\qquad A=L_r,$$

которое также выражается через θ*-функции.*

г) *Пара мероморфных функций* $\lambda(P)$, $\mu(P)$ *с единственным полюсом в точке* $P = Q$ *порождает пару коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов*

$$[A,\ L] = 0. \tag{3.1.49}$$

Уравнения на коэффициенты этих операторов называются уравнениями Новикова и также интегрируются в θ*-функциях.*

Пункты в), г) этой теоремы можно еще переформулировать так: каждый неспециальный дивизор D степени g порождает гомоморфизм кольца мероморфных функций с единственным полюсом в точке Q в некоторую коммутативную алгебру обыкновенных дифференциальных операторов

$$\lambda(P) \mapsto L_\lambda. \tag{3.1.50}$$

Все операторы вида L_λ имеют общую собственную функцию ψ,

$$L_\lambda \psi = \lambda\psi, \tag{3.1.51}$$

которая является функцией Бейкера — Ахиезера с дивизором D и существенной особенностью в точке Q вида $\exp kx$.

Доказательство этой теоремы, а также другие ее применения вместе с обобщением на матричные и разностные операторы см. в [15], [16].

§ 2. Двухточечная функция Бейкера — Ахиезера. Уравнение Шрёдингера в магнитном поле

Простейшее обобщение изученной в предыдущем параграфе функции Бейкера — Ахиезера состоит в добавлении лишних существенных особенностей. Общее определение l-точечных функций Бейкера — Ахиезера («ранга 1») таково.

Определение 3.2.1. Пусть Γ — риманова поверхность рода g; $Q_1, \ldots, Q_l$ — точки на Γ; $k_1^{-1}, \ldots, k_l^{-1}$ — локальные параметры в окрестности этих точек (где $k_i(Q_i) = \infty$); $q_1(k), \ldots, q_l(k)$ — набор многочленов; D — дивизор на $\Gamma \setminus (Q_1 \cup \ldots \cup Q_l)$; l-точечная функция Бейкера — Ахиезера, задаваемая этими данными,— это мероморфная на $\Gamma \setminus (Q_1 \cup \ldots \cup Q_l)$ функция $\psi = \psi(P)$ такая, что а) дивизор $\psi \geqslant -D$; б) при $P \to Q_i$ произведение $\psi(P)\exp(-q_i(k_i(P)))$ аналитично ($i = 1, \ldots, l$).

Функции Бейкера — Ахиезера, задаваемые условиями этого определения, образуют линейное пространство, которое мы обозначим через $\Lambda_l(D)$. По аналогии с теоремой 3.1.1 может быть доказана

Теорема 3.2.1. *Пусть* Γ — *риманова поверхность рода* g; D — *неспециальный дивизор на* $\Gamma \setminus (Q_1 \cup \ldots \cup Q_l)$. *Тогда размерность пространства* $\Lambda_l(D)$ *равна* $\deg D - g + 1$. *В частности, если* $D = P_1 + \ldots + P_g$ — *неспециальный дивизор степени* g, *то соответствующая* l*-точечная функция Бейкера — Ахиезера существует и определяется однозначно с точностью до множителя.*

Использование многоточечных функций Бейкера — Ахиезера позволяет проинтегрировать очень большое число важных нелинейных уравнений. Не давая здесь общей теории применения многоточечных функций к интегрированию уравнений (см. [15], [16]), разберем простой пример использования двухточечной функции Бейкера — Ахиезера.

Пусть Γ — произвольная риманова поверхность рода g; Q_+, Q_- — пара точек на Γ; k^+, k^- — локальные параметры в окрестностях точек Q_+, Q_-. Рассмотрим функцию Бейкера — Ахиезера $\psi = \psi(z, \bar{z}; P)$ с дивизором полюсов D, где $D = P_1 + \ldots + P_g$ — неспециальный дивизор степени g на

$\Gamma \setminus (Q_+ \cup Q_-)$, и существенными особенностями в точках Q_+ и Q_- вида $\exp k_+z$ и $\exp k_-\bar{z}$ соответственно. Здесь $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ — независимые переменные. Такая функция существует и определяется однозначно с точностью до нормировки. Ее явное выражение через θ-функцию поверхности Γ таково:

$$(3.2.1) \qquad \psi(z, \bar{z}; P) = \exp\left(z\int_{P_0}^{P}\Omega_+ + \bar{z}\int_{P_0}^{P}\Omega_-\right)\frac{\theta(A(P)-A(D)+zU_+ + \bar{z}U_- - K)}{\theta(A(P)-A(D)-K)}.$$

Здесь Ω_+, Ω_- — нормированные дифференциалы второго рода с двойным полюсом в точках Q_+, Q_- соответственно и главными частями в этих точках вида

$$(3.2.2) \qquad \Omega_\pm = d(k_\pm) + \ldots;$$

U_+, U_- — векторы b-периодов этих дифференциалов,

$$(3.2.3) \qquad U_{\pm_i} = \oint_{b_i}\Omega_\pm \quad (i = 1, \ldots, g).$$

Функция $\psi(z, \bar{z}; P)$ имеет в окрестностях точек $Q_\pm$ разложение вида: при $P \to Q_+$

$$(3.2.4) \qquad \psi = c_+ e^{kz}\left(1 + \frac{\xi_1^+}{k} + \frac{\xi_2^+}{k^2} + \ldots\right), \qquad k = k_+,$$

и при $P \to Q_-$

$$(3.2.5) \qquad \psi = c_- e^{k\bar{z}}\left(1 + \frac{\xi_1^-}{k} + \frac{\xi_2^-}{k^2} + \ldots\right), \qquad k = k_-.$$

Коэффициенты $c_\pm$, $\xi_i^\pm$ являются функциями от z, $\bar{z}$. Нормируем ψ так, чтобы коэффициент c_+ в формуле (3.2.4) был равен 1. Тогда коэффициент c_- обозначим через c ($c = c_-/c_+$). По аналогии с теоремой 3.1.2 доказывается

Теорема 3.2.2. *Функция Бейкера — Ахиезера $\psi(z, \bar{z}; P)$, нормированная условием $c_+ = 1$, есть решение уравнения*

$$(3.2.6) \qquad H\psi = 0,$$

где

$$(3.2.7) \qquad H = -4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\bar{z}} + a(z, \bar{z})\frac{\partial}{\partial\bar{z}} + b(z, \bar{z}),$$

коэффициенты a, b оператора H имеют вид ($c = c_-/c_+$)

$$(3.2.8) \qquad a = 4\frac{\partial \ln c}{\partial z}, \qquad b = 4\frac{\partial\xi_1^+}{\partial\bar{z}}.$$

Доказательство. Вид оператора H, по аналогии с леммой 3.1.1, подбирается из следующих двух условий: для разложения (3.2.4) (с $c_+ = 1$):

$$(3.2.9) \qquad H\psi = O\left(\frac{1}{k}\right)e^{kz};$$

для разложения (3.2.5):

$$(3.2.10) \qquad H\psi = e^{k\bar{z}}\left(\tilde{c}(z, \bar{z}) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

(явный вид функции $\tilde{c}(z, \bar{z})$ для нас несуществен). Из формул (3.2.9), (3.2.10) вытекает, что функция $H\psi$ снова есть функция Бейкера — Ахиезера, но в точке $P = Q_+$ произведение $(H\psi)\exp(-k_+z)$ равно нулю. В силу единственности $H\psi = 0$. Теорема доказана.

Построенный по римановой поверхности Γ, паре точек $Q_\pm$ на ней и дивизору D оператор H может быть интерпретирован как оператор Шрёдингера для двумерного электрона в магнитном поле $B(x, y) = \partial_x A_y - \partial_y A_x$, где (A_x, A_y) — вектор-потенциал, в присутствии потенциала $u(x, y)$ (электрического поля):

$$(3.2.11)\qquad H = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + eA_x\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial y} + eA_y\right)^2 + u(x, y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar z}\right);$$

e — заряд электрона; $\hbar = 2m = c = 1$ (магнитное поле $B(x, y)$ направлено по третьей оси). Для оператора (3.2.7) имеем

$$(3.2.12)\qquad \begin{cases} 2ie(A_x - iA_y) = a(z, \bar z) = 4\dfrac{\partial \ln c}{\partial z}, \\ 2ie(A_x + iA_y) = 0; \end{cases}$$

$$(3.2.13)\qquad u = b + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial \bar z} = 4\frac{\partial \xi_1^+}{\partial \bar z} + 2\frac{\partial^2 \ln c}{\partial z\, \partial \bar z}.$$

Выведем формулы, выражающие коэффициенты a, b (и тем самым магнитное поле $B = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ и электрическое $u(x, y)$) через θ-функции.

Теорема 3.2.3. *Функция*

$$(3.2.14)\qquad \psi(z, \bar z; P) = \exp\left[z\left(\int_{P_0}^{P}\Omega_+ - \alpha_+\right) + \bar z\left(\int_{P_0}^{P}\Omega_- - \alpha_-\right)\right] \times$$
$$\times \frac{\theta(A(P) + zU_+ + \bar z U_- + \zeta_0)\,\theta(A(P_+) + \zeta_0)}{\theta(A(P) + \zeta_0)\,\theta(A(P_+) + zU_+ + \bar z U_- + \zeta_0)},$$

где константы $\alpha_\pm$ *таковы, что* $\displaystyle\int_{P_0}^{P}\Omega_+ - \alpha_+ = k_+ + O\left(\frac{1}{k_+}\right)$, *при* $P \to Q_+$, $\displaystyle\alpha_- = \int_{P_0}^{P_+}\Omega_-$, *является при любом* ζ_0 *решением уравнения* $H\psi = 0$, *где* H — *оператор Шрёдингера двумерного электрона в магнитном поле,*

$$(3.2.15)\qquad H = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + eA_x\right)^2 + \left(i\frac{\partial}{\partial y} + eA_y\right)^2 + u(x, y).$$

Коэффициенты этого оператора имеют вид

$$(3.2.16)\qquad u(x, y) =$$
$$= 2\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar z}\ln\left[\theta(A(P_+) + zU_+ + \bar z U_- + \zeta_0)\,\theta(A(P_-) + zU_+ + \bar z U_- + \zeta_0)\right] + \mathrm{const},$$

$$(3.2.17)\qquad A_x = -iA_y = \frac{1}{ie}\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\theta(A(P_-) + zU_+ + \bar z U_- + \zeta_0)}{\theta(A(P_+) + zU_+ + \bar z U_- + \zeta_0)}.$$

Магнитное поле $B(x, y) = \partial_x A_y - \partial_y A_x$ *направлено по третьей оси и имеет вид*

$$(3.2.18)\qquad B(x, y) = \frac{2}{e}\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial \bar z}\ln\frac{\theta(A(P_-) + zU_+ + \bar z U_- + \zeta_0)}{\theta(A(P_+) + zU_+ + \bar z U_- + \zeta_0)}.$$

Доказательство. Формула (3.2.14) получается из (3.2.1) нормировкой (делим на c_+), где $\zeta_0 = -A(D) - K$ — произвольная точка якобиана $J(\Gamma)$. Для функций $c(z, \bar{z})$, ξ_1^+ тогда будем иметь

$$\ln c(z, \bar{z}) = \ln \frac{\theta(A(P_-) + zU_+ + \bar{z}U_- + \zeta_0)\, \theta(A(P_+) + \zeta_0)}{\theta(A(P_-) + \zeta_0)\, \theta(A(P_+) + zU_+ + \bar{z}U_- + \zeta_0)} + \ldots, \tag{3.2.19}$$

$$\xi_1^+ = -\frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{\theta(A(P_+) + zU_+ + \bar{z}U_- + \zeta_0)}{\theta(A(P_+) + \zeta_0)} + \ldots, \tag{3.2.20}$$

где многоточием обозначены линейные комбинации переменных z и $\bar{z}$, возникающие из-за разложения показателя экспоненты в формуле (3.2.14). Отсюда и из формул (3.2.12), (3.2.13) сразу получаем доказательство теоремы.

Замечание. Группа периодов магнитного поля $B(x, y)$ совпадает с группой периодов вектор-потенциала (A_x, A_y) — это следует из полученных явных формул. Поэтому в двоякопериодическом поле (двумерной кристаллической решетке с периодами T_x, T_y) построенные решения имеют нулевой магнитный поток через ячейку решетки $\int_0^{T_x}\int_0^{T_y} B(x, y)\, dx\, dy = 0$. Случай ненулевого магнитного потока проинтегрирован в [37].

Укажем простое достаточное условие вещественности построенных операторов H (см. [49]).

Лемма 3.2.1. *Пусть на Γ существует антиинволюция τ, переставляющая точки Q_+, Q_-,*

$$\tau\colon\ \Gamma \to \Gamma,\quad \tau^2 = 1,\quad \tau(Q_+) = Q_-. \tag{3.2.21}$$

Локальные параметры k_+, k_- в окрестностях этих точек выберем так, чтобы $k_- = -\overline{\tau(k_+)}$. Если дивизор D (неспециальный степени g) таков, что $D + \tau(D)$ — дивизор нулей дифференциала третьего рода ω с простыми полюсами в точках Q_+, Q_-, то коэффициенты оператора H вещественны.

Доказательство. В силу условия леммы произведение $\tilde{\omega} = \psi(z, \bar{z}; P)\overline{\psi(z, \bar{z}; \tau(P))}\omega$ есть снова дифференциал третьего рода с простыми полюсами в точках Q_+, Q_-. Равенство нулю его суммы вычетов дает $c = \bar{c}$, откуда и вытекает вещественность B. Вещественность u проверяется аналогично.

В силу равенства (2.4.20) условие на дивизор D, сформулированное в этой лемме, можно переписать в виде соотношения на якобиане $J(\Gamma)$:

$$A(D) + A(\tau(D)) = A(Q_+) + A(Q_-) - 2K \tag{3.2.22}$$

(K — римановы константы).

ГЛАВА 4

ЭФФЕКТИВИЗАЦИЯ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КдФ И КП. ВОССТАНОВЛЕНИЕ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ЕЕ МНОГООБРАЗИЮ ЯКОБИ. ПРОБЛЕМА РИМАНА И ГИПОТЕЗА С. П. НОВИКОВА

§ 1. Уравнение КдФ — род $g = 1, 2$

В предыдущей главе мы получили «явные формулы» (3.1.25), (3.1.38), выражающие решения ряда важных нелинейных уравнений через θ-функции. Эти формулы мало пригодны для вычислений в рамках теории θ-функций по следующим двум причинам:

1) Матрица Римана B_{jk} не является произвольной.

2) Связь векторов U, V, W и матрицы Римана B_{jk} трансцендентна (в явном виде эта связь никогда и не обсуждалась).

Напомним (см. § 1 главы 2), что совокупность матриц периодов (B_{jk}) римановых поверхностей рода $g > 1$ зависит от $3g - 3$ комплексных параметров (при $g = 1$ от одного параметра). В то же время $g \times g$-матрицы Римана общего вида образуют семейство размерности $g(g+1)/2$. Риман поставил вопрос: какие условия нужно наложить на матрицу Римана B_{jk}, чтобы она была матрицей периодов голоморфных дифференциалов на некоторой римановой поверхности Г? Для родов $g = 1, 2, 3$ матрица Римана может быть любой неразложимой; проблема Римана нетривиальна при $g \geqslant 4$; эффективного ее решения при всех $g \geqslant 4$ не было получено (см. [26], [38], [39]).

С. П. Новиков предложил получить полный набор необходимых соотношений на матрицу B_{jk} и векторы U, V, W путем простой подстановки формул (3.1.38), (3.1.25) в уравнения КдФ и КП, где θ-функция определяется своим рядом Фурье (1.1.1). При этом получится система алгебраических уравнений, из которой определятся векторы U, V, W; условия совместности этой системы дадут полный набор соотношений на матрицу Римана B_{jk}.

Реализации этой программы посвящена данная глава. В частности, для родов $g = 1, 2, 3$ (где матрица Римана B_{jk} произвольна) дана полная эффективизация формул (3.1.25), (3.1.28) для решения уравнения КП и уравнений, с ним связанных.

Начнем со случая малых родов $g = 1, 2$ для уравнения КдФ. Здесь матрица Римана B_{jk} — любая (общего положения). Ищем решения уравнения КдФ

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}) \tag{4.1.1}$$

в виде

$$u(x, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(Ux + Wt + z_0), \tag{4.1.2}$$

где θ-функция построена по некоторой $g \times g$-матрице Римана B_{jk}, векторы U, W пока неизвестны, z_0 — произвольный g-мерный вектор. Эта формула отличается от формулы (3.1.38) тем, что $c = 0$; этого можно всегда добиться заменой $W \mapsto W - \frac{2c}{3}U$. Подставляя (4.1.2) в (4.1.1), получим

$$2\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial t}\ln\theta = \frac{1}{4}\left[24\frac{\partial^2\ln\theta}{\partial x^2}\frac{\partial^3\ln\theta}{\partial x^3} + 2\frac{\partial^5\ln\theta}{\partial x^5}\right],$$

где $\theta = \theta(z)$, $z = Ux + Wt + z_0$ — произвольный вектор, $\frac{\partial}{\partial x} = \sum U_i\frac{\partial}{\partial z_i}$, $\frac{\partial}{\partial t} = \sum W_i\frac{\partial}{\partial z_i}$. Это выражение можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{-2\frac{\partial^2\ln\theta}{\partial x\,\partial t} + 3\left(\frac{\partial^2\ln\theta}{\partial x^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\ln\theta}{\partial x^4}\right\} = 0. \tag{4.1.3}$$

Пусть матрица B_{jk} неразложима (см. § 3 главы 1). В этом случае из (4.1.3) следует, что выражение в фигурных скобках равно константе. Обозначим эту константу через $4d$. Элементарное вычисление приводит нас к такому соотношению

$$\theta_{xxxx}\theta - 4\theta_{xxx}\theta_x + 3\theta_{xx}^2 - 4\theta_{xt}\theta + 4\theta_x\theta_t + 8d\theta^2 = 0 \tag{4.1.4}$$

(значки x, t внизу обозначают производные), где $\theta = \theta(z)$, которое должно быть справедливо при любых z. Чтобы получить отсюда конечную систему уравнений на векторы U, W и константу d, используем теорему сложения 1.4.1. В нужном для нас частном случае она имеет вид

$$\theta(z^1)\,\theta(z^2) = \sum_{n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^g} \hat{\theta}[n](w^1)\,\hat{\theta}[n](w^2), \tag{4.1.5}$$

$$z^1 + z^2 = w^1, \quad z^1 - z^2 = w^2. \tag{4.1.5$'$}$$

Здесь мы используем сокращенное обозначение

$$(4.1.5'')\qquad \hat\theta[n](w) = \theta[n,\ 0](w \mid 2B).$$

Запись $n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^g$ означает, что суммирование в формуле (4.1.5) ведется по всем полупериодам $n = (n_1, \ldots, n_g)$, $n_i = 0,\ 1/2$.

Значения функций $\hat\theta[n](w)$, а также значения их производных

$$\hat\theta_{ij}\ldots[n](w) \equiv \frac{\partial}{\partial w_i}\frac{\partial}{\partial w_j}\ldots\hat\theta[n](w)$$

при $w = 0$ будем называть θ-*константами*. Условимся опускать нулевой аргумент у θ-констант: $\hat\theta_{ij}\ \ldots\ [n] \equiv \hat\theta_{ij}[n](0)$.

Лемма 4.1.1. *Уравнение* (4.1.4) *эквивалентно следующей системе из* 2^g *уравнений на векторы* $U = (U_1, \ldots, U_g)$, $W = (W_1, \ldots, W_g)$ *и константу* d:

$$(4.1.6)\qquad \partial_U^4\hat\theta[n] - \partial_U\partial_W\hat\theta[n] + d\hat\theta[n] = 0,$$

где уравнения нумеруются вектором $n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^g$. *Здесь введены обозначения*

$$(4.1.7)\qquad \begin{cases} \partial_U^4\hat\theta[n] = \sum\limits_{i,\,j,\,k,\,l} U_iU_jU_kU_l\hat\theta_{ijkl}[n], \\ \partial_U\partial_W\hat\theta[n] = \sum\limits_{i,\,j} U_iW_j\hat\theta_{ij}[n]. \end{cases}$$

Доказательство. Введем операторы

$$(4.1.8)\qquad \begin{cases} X_{z^1} = \sum U_j\dfrac{\partial}{\partial z_j^1}, & X_{z^2} = \sum U_j\dfrac{\partial}{\partial z_j^2}, \\ T_{z^1} = \sum W_j\dfrac{\partial}{\partial z_j^1}, & T_{z^2} = \sum W_j\dfrac{\partial}{\partial z_j^2} \end{cases}$$

и, аналогично, операторы X_{w^1}, X_{w^2}, T_{w^1}, T_{w^2}, где все z заменены на w, связанные соотношениями (в силу (4.1.5'))

$$(4.1.9)\qquad \begin{cases} X_{z^1} = X_{w^1} + X_{w^2}, & T_{z^1} = T_{w^1} + T_{w^2}, \\ X_{z^2} = X_{w^1} - X_{w^2}, & T_{z^2} = T_{w^1} - T_{w^2}. \end{cases}$$

Уравнение (4.1.4) перепишется в виде

$$(4.1.10)\qquad [(X_{z^1}^4 - 4X_{z^1}^3X_{z^2} + 3X_{z^1}^2X_{z^2}^2 + 4X_{z^1}T_{z^2} - \\ - 4X_{z^1}T_{z^1} + 8d)\,\theta(z^1)\,\theta(z^2)]_{z^1=z^2} = 0.$$

Выразим оператор, стоящий в этой формуле в скобках, через операторы X_{w^i}, T_{w^i} по формулам (4.1.9) и применим к правой части теоремы сложения (4.1.5) при $w^1 = 2z$, $w^2 = 0$. В силу четности функций $\hat\theta[n](w)$ достаточно в полученном выражении оставить четные степени операторов X_{w^2}, T_{w^2}. Если это учесть, вычисление делается совсем простым и приводит к соотношению

$$[8(X_{w^2}^4 - X_{w^2}T_{w^2} + d)\sum_{n\in\frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^g}\hat\theta[n](w^1)\,\hat\theta[n]\,(w^2)]_{\substack{w^1=2z\\ w^2=0}} = 0.$$

Легко видеть, что 2^g функций $\hat\theta[n](2z)$, $n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^g$, линейно независимы (это базис в пространстве θ-функций второго порядка — см. § 1 главы 1). Приравнивая нулю коэффициенты при этих функциях, мы и получим систему (4.1.6). Лемма доказана.

Система (4.1.6) инвариантна относительно следующих масштабных преобразований:

$$(4.1.11)\qquad U \mapsto \lambda U,\quad W \mapsto \lambda^2 U,\quad d \mapsto \lambda^4 d.$$

Легко сопоставить эти преобразования с очевидной масштабной группой уравнения КдФ.

Решим теперь систему (4.1.6) для $g = 1, 2$.

а) $g = 1$ [1]). Система (4.1.6) примет такой вид:

$$\left\{\begin{aligned} &U^4\hat\theta^{IV}[0] - UW\hat\theta''[0] + d\hat\theta[0] = 0,\\ &U^4\hat\theta^{IV}[1/2] - UW\hat\theta''[1/2] + d\hat\theta[1/2] = 0.\end{aligned}\right. \tag{4.1.12}$$

В силу инвариантности (4.1.11) можно считать, что $U = 1$; тогда

$$W = \frac{\hat\theta^{IV}[0]\,\hat\theta[1/2] - \hat\theta^{IV}[1/2]\,\hat\theta[0]}{\hat\theta''[0]\,\hat\theta[1/2] - \hat\theta''[1/2]\,\hat\theta[0]}. \tag{4.1.13}$$

Еще проще получить выражение для W, подставив в (4.1.4) вместо θ нечетную функцию $\theta_1(z) = \theta[1/2, 1/2](z)$ (вторые логарифмические производные функций θ и θ_1 отличаются только сдвигом аргумента). Подставляя в (4.1.4) (где $\theta \mapsto \theta_1$) $z = 0$, получим, в силу нечетности ($U = 1$),

$$W = -\theta_1'''(0)/\theta_1'(0). \tag{4.1.13$'$}$$

Прежде чем решать систему (4.1.6) для родов $g \geqslant 2$, наложим на матрицу B_{jk} следующее *условие невырожденности*:

$$\text{ранг}\,(\hat\theta_{11}[n],\ \hat\theta_{12}[n],\ \ldots,\ \hat\theta_{gg}[n],\ \hat\theta[n]) = \frac{g(g+1)}{2} + 1. \tag{4.1.14}$$

Здесь строки матрицы, стоящей в скобках, нумеруются вектором $n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_g)^2$. Разумеется, из невырожденности следует неразложимость (для разложимой матрицы $B = \begin{pmatrix} B' & 0\\ 0 & B''\end{pmatrix}$ матрица (4.1.14) будет иметь нулевые столбцы). Ниже (см. лемму 4.3.1) мы покажем, что условие невырожденности выполнено для матриц Римана римановых поверхностей.

б) $g = 2$. Перепишем систему (4.1.6) в виде

$$U_1W_1\hat\theta_{11}[n] + (U_1W_2 + U_2W_1)\,\hat\theta_{12}[n] + U_2W_2\hat\theta_{22}[n] - \\ - d\hat\theta[n] = \partial_U^4\hat\theta[n], \qquad n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^2 \tag{4.1.15}$$

(напомним: индексы внизу использованы для обозначения производных). Условие невырожденности здесь есть условие обратимости 4×4-матрицы

$$(\hat\theta_{11}[n],\ \hat\theta_{12}[n],\ \hat\theta_{22}[n],\ \hat\theta[n]) \tag{4.1.16}$$

(строки нумеруются характеристикой $n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^2$. Пусть $(a_n^{11}, a_n^{12}, a_n^{22}, a_n)$ — обратная матрица. Тогда из системы (4.1.15) получаем

$$\left\{\begin{aligned} &W_1 = \frac{1}{U_1}\sum_{n\in\frac12(\mathbb{Z}_2)^2} a_n^{11}\partial_U^4\hat\theta[n] = \frac{Q_{11}(U)}{U_1},\\ &W_2 = \frac{1}{U_2}\sum_{n\in\frac12(\mathbb{Z}_2)^2} a_n^{22}\partial_U^4\hat\theta[n] = \frac{Q_{22}(U)}{U_2},\\ &U_1W_2 + U_2W_1 = \sum_{n\in\frac12(\mathbb{Z}_2)^2} a_n^{12}\partial_U^4\hat\theta[n] = Q_{12}(U).\end{aligned}\right. \tag{4.1.17}$$

---

[1]) Следует отметить, что в работе [23] случай $g = 1$ разобран неверно (равенство $\hat\theta^{IV}[0]/\hat\theta[0] = \hat\theta^{IV}[1]/\hat\theta[1]$ не имеет места).

Подставляя W_1, W_2 в последнее соотношение, получаем однородное уравнение шестой степени на вектор $U = (U_1, U_2)$:

$$(4.1.18)\quad P(U_1, U_2) = U_1^2 Q_{22}(U) - U_1 U_2 Q_{12}(U) + U_2^2 Q_{11}(U) = 0,$$

где многочлены $Q_{ij}(U)$ определены в формулах (4.1.17). По заданной матрице Римана B_{jk} получаем 6 векторов U (с точностью до скалярного множителя). После этого находим вектор $W = (W_1, W_2)$ по формулам (4.1.17). Итак, доказана

Теорема 4.1.1. *Пусть B_{jk} — 2×2-матрица Римана общего положения. Тогда формула* (4.1.2), *где $\theta(z) = \theta(z \mid B)$, векторы U, W определяются из уравнений* (4.1.18), (4.1.17), *дает при любом z_0 решение уравнения КдФ* (4.1.1).

Формулы другого типа для вектора W можно получить, используя нечетные характеристики прямо из соотношения (4.1.4) (как и для $g = 1$). Заменяя, например, в уравнении (4.1.4) последовательно $\theta \mapsto \theta[(1/2, 0), (1/2, 0)]$ и $\theta \to \theta[(0, 1/2), (0, 1/2)]$, получим для вектора W систему линейных уравнений, откуда

$$(4.1.19)\quad W_i = \frac{\theta_{i+1}\left[\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] \partial_U^3 \theta\left[\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right] - \theta_{i+1}\left[\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right] \partial_U^3 \theta\left[\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right]}{\theta_1\left[\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right] \theta_2\left[\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] - \theta_1\left[\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}\right)\right] \theta_2\left[\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]}$$

($i = 1, 2$; $i + 1$ берется mod 2).

§ 2. Уравнение КП — род 2 и род 3

Для уравнения КП

$$(4.2.1)\quad \frac{3}{4} u_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_t - \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx})\right)$$

мы ищем решение в виде

$$(4.2.2)\quad u(x, y, t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \theta(Ux + Vy + Wt + z_0)$$

$\left(\text{константа } c \text{ в формуле (3.1.25) зануляется заменой } W \mapsto W - \frac{3}{2} cU\right)$. По аналогии с предыдущим параграфом, после подстановки (4.2.2) в (4.2.1) получается соотношение вида

$$(4.2.3)\quad \theta_{xxxx}\theta - 4\theta_{xxx}\theta_x + 3\theta_{xx}^2 + 4\theta_x\theta_t - 4\theta_{xt}\theta + 3\theta_{yy}\theta - 3\theta_y^2 + 8\,d\theta^2 = 0$$

(через $4d$ мы, как и выше, обозначили постоянную интегрирования), где $\theta = \theta(z)$, справедливое при любых z. Использование теоремы сложения, как и выше, приводит к такому утверждению.

Лемма 4.2.1. *Функция вида* (4.2.2) *является решением уравнения* (4.2.1), *если и только если справедлива система соотношений*

$$(4.2.4)\quad \partial_U^4 \hat{\theta}[n] - \partial_U \partial_W \hat{\theta}[n] + \frac{3}{4} \partial_V^2 \theta[n] + d\hat{\theta}[n] = 0, \quad n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^g$$

(*обозначения такие же, как и в лемме* 4.1.1).

Система (4.2.4) инвариантна относительно преобразований вида

$$(4.2.5)\qquad \begin{cases} U \mapsto \lambda U,\ V \mapsto \pm(\lambda^2 V + 2\alpha\lambda U), \\ W \mapsto \lambda^3 W + 3\lambda^2\alpha V + 3\lambda\alpha^2 U, \quad d \mapsto \lambda^4 d. \end{cases}$$

Здесь λ, α — произвольные комплексные параметры, $\lambda \neq 0$. Инвариантность (4.2.5) легко сопоставляется с инвариантностью (3.1.21).

Для рода $g = 1$ векторы U, V, W коллинеарны (просто числа), и уравнение КП сводится к уравнению КдФ. Разберем теперь случай рода $g = 2$. Если векторы U и V линейно зависимы, то после надлежащего преобразования вида (4.2.5) получим $V = 0$. Тем самым мы снова придем к уравнению КдФ, где векторы U, W при $g = 2$ были найдены выше.

Будем теперь считать, что векторы U и V линейно независимы. Тогда вектор W имеет вид

$$(4.2.6)\qquad W = aU + bV,$$

и уравнение (4.2.1) превращается в вариант уравнения Буссинеска[1])

$$(4.2.1')\qquad 3v_{yy} - 4av_{xx} + 4bv_{xy} + (3v^2 + v_{xx})_{xx} = 0,$$

где $v(x + at,\ y + bt) = u(x,\ y,\ t)$,

$$(4.2.2')\qquad v(x,\ y) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(Ux + Vy + z_0).$$

Используя инвариантность (4.2.5), положим

$$(4.2.7)\qquad U_2 = 1,\quad V_2 = 0.$$

Решая систему (4.2.4) при $g = 2$ по аналогии с предыдущим параграфом, получим

$$W_i = \frac{3}{4}\frac{V_i^2}{U_i} + \frac{Q_{ii}(U)}{U_i},\quad (U_2V_1 - U_1V_2)^2 = -\frac{4}{3}P(U_1,\ U_2),$$

где многочлены Q_{ii} определены равенствами (4.1.17), многочлен P имеет вид (4.1.18). Учитывая «калибровку» (4.2.7), получим для векторов U, V, W выражение через параметр $z = U_1$

$$(4.2.8)\qquad \begin{cases} U = (z,\ 1),\quad V = \left(\pm\frac{2i}{\sqrt{3}}\sqrt{P(z,\ 1)},\ 0\right), \\ W = (-zQ_{22}(z,\ 1) + Q_{12}(z,\ 1),\quad Q_{22}(z,\ 1)). \end{cases}$$

Коэффициенты a и b разложения (4.2.6) имеют вид

$$(4.2.9)\qquad a = Q_{22}(z,\ 1),\quad b = \frac{\sqrt{3}(Q_{12}(z,1) - zQ_{22}(z,\ 1))}{2i\sqrt{P(z,\ 1)}}.$$

Итак, доказана

Теорема 4.2.1. *Пусть $B = (B_{jk})$ — любая 2×2-матрица Римана общего положения. Тогда формула (4.2.2′), где $\theta(z) = \theta(z \mid B)$, векторы U, V определены формулами (4.2.8), z — произвольный параметр ($P(z,\ 1) \neq 0$), дает при любом z_0 решение уравнения (4.2.1′) (коэффициенты a, b имеют вид (4.2.9)).*

---

[1]) В полном соответствии с результатами § 1 главы 3: на римановой поверхности Г рода 2 и точки общего положения на ней существует функция с единственным полюсом третьего порядка в этой точке, поэтому мы и получаем уравнение нелинейной струны. Для точек Вейерштрасса (их ш ть) существует функция с полюсом второго порядка, и мы приходим к уравнению КдФ.

Перейдем теперь к роду $g = 3$. Здесь уже векторы U, V, W, вообще говоря, линейно независимы и уравнение КП не редуцируется к КдФ и к нелинейной струне. Чтобы получить соотношения на вектор U, будем рассматривать систему (4.2.4) как линейную систему на 7 неизвестных:

$$U_1W_1-\frac{3}{4}V_1^2,\quad U_1W_2+U_2W_1-\frac{3}{2}V_1V_2,\ \ldots,\ U_3W_3-\frac{3}{4}V_3^2,\quad -d.$$

Матрица этой системы

$$(4.2.10)\qquad (\hat\theta_{11}[n],\ \hat\theta_{12}[n],\ \ldots,\ \hat\theta_{33}[n],\ \hat\theta[n]),\qquad n\in\frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^3,$$

размером 8×7 имеет ранг 7 в силу условия невырожденности (4.1.14). Условие совместности этой линейной системы имеет вид

$$(4.2.11)\quad R(U_1,\ U_2,\ U_3)=\det(\hat\theta_{11}[n],\ \hat\theta_{12}[n],\ \ldots,\ \hat\theta_{33}[n],\ \hat\theta[n],\ \partial_U^4\hat\theta[n])=0$$

(характеристики $n\in\frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^3$ нумеруют строки этой 8×8-матрицы). Легко показать, что соотношение (4.2.11) не есть тождественный нуль для матриц B_{jk} общего положения (достаточно вычислить определитель (4.2.11) в малой окрестности диагональной матрицы B). Ниже (в § 3) будет показано, что других соотношений на вектор U быть не должно. Найдем векторы V, W. Пусть $n_1,\ \ldots,\ n_7$ — такие характеристики $\in\frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^3$, что 7×7-минор

$$(4.2.12)\qquad (\hat\theta_{ij}[n],\ \hat\theta[n])\qquad (n=n_1,\ \ldots,\ n_7)$$

матрицы (4.2.10) не равен нулю. Пусть

$$(4.2.13)\qquad (a_n^{ij},\ a_n)\qquad (n=n_1,\ \ldots,\ n_7)$$

— обратная матрица. Тогда из (4.2.4) при $g = 3$ получаем

$$(4.2.14)\qquad U_iW_i-\frac{3}{4}V_i^2=Q_{ii}(U)\qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

$$(4.2.15)\qquad U_iW_j+U_jW_i-\frac{3}{2}V_iV_j=Q_{ij}(U)\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ i\neq j),$$

где многочлены $Q_{ij}(U)$ имеют вид

$$(4.2.16)\qquad Q_{ij}(U)=\sum_{k=1}^{7}a_{n_k}^{ij}\partial_U^4\hat\theta\,[n_k].$$

Получаем

$$(4.2.17)\qquad W_i=\frac{3}{4}\frac{V_i^2}{U_i}+\frac{Q_{ii}(U)}{U_i}.$$

Подставляя в (4.2.15), получим

$$(4.2.18)\qquad -\frac{3}{4}(U_iV_j-U_jV_i)^2=[U_i^2Q_{jj}-U_iU_jQ_{ij}+U_j^2Q_{ii}].$$

Обозначим через $P_{ij}=P_{ij}(U)$ многочлен, стоящий в правой части этой формулы. Извлекая корень, получим

$$(4.2.19)\qquad U_iV_j-U_jV_i=\frac{2i}{\sqrt{3}}\sqrt{P_{ij}}\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ i<j).$$

Условие совместности этой системы имеет вид

$$(4.2.20)\qquad U_1\sqrt{P_{23}}-U_2\sqrt{P_{13}}+U_3\sqrt{P_{12}}=0,$$

что дает правило согласования знаков перед корнями $\sqrt{P_{ij}}$. Соотношение (4.2.20) есть тождество, вытекающее из (4.2.11). Из (4.2.19) определяем вектор V с точностью до преобразований (4.2.5):

$$(4.2.21)\qquad \begin{cases} V_1 = -\lambda\,(U_3\sqrt{P_{13}(U)} + U_2\sqrt{P_{12}(U)}),\\ V_2 = \lambda\,(U_1\sqrt{P_{12}(U)} - U_3\sqrt{P_{23}(U)}),\\ V_3 = \lambda\,(U_2\sqrt{P_{23}(U)} + U_1\sqrt{P_{13}(U)}),\end{cases}$$

$$\lambda = \frac{2i}{\sqrt{3}\,(U_1^2+U_2^2+U_3^2)}.$$

Вектор W определится тогда из равенств (4.2.17). Итак, доказана

Теорема 4.2.2. *Пусть B_{jk} — 3×3-матрица Римана общего положения, θ — соответствующая θ-функция. Тогда функция $u(x,\ y,\ t) = 2\partial_x^2 \ln\theta(Ux+Vy+Wt+z_0)$ является решением уравнения КП* (4.2.1) *при любом z_0, где векторы U, V, W находятся из соотношений* (4.2.11), (4.2.21), (4.2.17). *Для тех векторов U, для которых U, V, W линейно зависимы, уравнение КП сводится к уравнению нелинейной струны* (3.1.39) *или к уравнению КдФ* (4.1.1). *При этом для выполнения уравнения КдФ необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (4.2.11) *было совместно с системой $P_{12}(U) = 0$, $P_{13}(U) = 0$, $P_{23}(U) = 0$. Такое условие совместности выполняется для матриц B_{jk}, отвечающих гиперэллиптическим кривым рода* 3, *и только для них.*

В этой теореме остался недоказанным только критерий гиперэллиптичности матрицы B_{jk}. Необходимость этого критерия очевидна, так как для гиперэллиптического случая выполняется уравнение КдФ и $W = 0$, а вектор U как раз находится из системы $P_{12}(U) = 0$, $P_{13}(U) = 0$, $P_{23}(U) = 0$ — это вытекает из соотношений (4.1.6). Достаточность будет легко вытекать из результатов следующего параграфа.

§ 3. Уравнение КП — род $g \geqslant 2$. Канонические уравнения римановых поверхностей

В главе 3 векторы U, V, W определялись как векторы периодов некоторых мероморфных дифференциалов на римановой поверхности Γ. Мы докажем теперь, что у системы (4.2.4), построенной по матрице периодов голоморфных дифференциалов на Γ, других решений и нет. Это позволит получить нетривиальные следствия.

Сформулируем без доказательства ряд необходимых для дальнейшего фактов.

А. Пусть Γ — риманова поверхность (гладкая алгебраическая кривая) рода $g \geqslant 2$, $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис голоморфных дифференциалов на Γ. Определено *каноническое отображение*

$$(4.3.1)\qquad \Gamma \xrightarrow{\omega} \mathbb{C}P^{g-1};\qquad P \mapsto (\omega_1(P):\ldots:\omega_g(P)).$$

Здесь $\mathbb{C}P^{g-1}$ — комплексное проективное пространство размерности $g-1$; формула (4.3.1) задает отображение в однородных координатах. Образ $\Gamma' = \omega(\Gamma)$ этого отображения будем называть канонической кривой, а его уравнения — каноническими уравнениями Γ. Для гиперэллиптической кривой Γ этот образ есть гладкая рациональная кривая $\Gamma' = \omega(\Gamma)$ в $\mathbb{C}P^{g-1}$ степени $g-1$ и ω есть двулистное накрытие $\omega\colon \Gamma \to \Gamma'$. Для негиперэллиптической кривой Γ отображение ω есть гладкое вложение (т. е. отображение $\omega\colon \Gamma \to \Gamma' = \omega(\Gamma)$ — изоморфизм). Степень кривой $\Gamma' = \omega(\Gamma) \in \mathbb{C}P^{g-1}$ (т. е. количество точек в пересечении Γ' с любой гиперплоскостью) равна $2g-2$ (см. [4]).

В. Пусть $(\theta) \subset J(\Gamma)$ — тэта-дивизор, т. е. совокупность нулей тэта-функции (о тэта-дивизоре см. § 4 главы 2). Рассмотрим гауссово отображение

$$(\theta) \to \mathbb{C}P^{g-1},$$

заданное для неособых точек θ-дивизора формулой

$$z \mapsto \operatorname{grad}\theta(z) = (\theta_1(z):\theta_2(z): \dots :\theta_g(z)). \tag{4.3.2}$$

Это отображение почти всюду имеет ранг $g-1$, т. е. является накрытием с ветвлением [1]) (см. [4]).

С. Пусть Γ — общая риманова поверхность рода $g \geqslant 5$. Через $(\theta)_{\text{sing}} \in J(\Gamma)$ обозначим совокупность особых точек θ-дивизора (тех точек z, где $\theta(z) = 0$ и $\operatorname{grad}\theta(z) = 0$). Пересечение касательных конусов особых точек

$$\sum_{i,\,j=1}^{g} x_i x_j \theta_{ij}(z) = 0, \qquad z \in (\theta)_{\text{sing}}, \tag{4.3.3}$$

в пространстве $\mathbb{C}P^{g-1}$ с однородными координатами $(x_1: \dots : x_g)$ есть каноническая кривая Γ'. Известны следующие исключения:

а) Если на кривой Γ существует мероморфная функция $f(P)$ с единственным полюсом третьего порядка в некоторой точке Q (такие кривые называются иногда *тригональными*), то система (4.3.3) задает некоторую линейчатую поверхность. В этом случае каноническая кривая Γ' может быть получена так: добавим к системе (4.3.3) систему

$$\sum_{i,\,j,\,k} x_i x_j x_k \theta_{ijk}(z) = 0;\ \theta(z) = \theta_i(z) = \theta_{ij}(z) = 0 \quad (i, j = 1, \dots, g). \tag{4.3.3$'$}$$

б) Если Γ — гладкая плоская кривая степени 5 (ее род равен 6), то система (4.3.3) задает в $\mathbb{C}P^5$ многообразие Веронезе вида $(x^2{:}xy{:}xz{:}y^2{:}yz{:}\ z^2)$ (x, y, z — параметры) (см. [25]).

Выведем из этих утверждений ряд следствий.

Лемма 4.3.1. *Пусть $B = (B_{jk})$ — матрица Римана римановой поверхности Γ рода g; $\hat\theta_{ij}[n]$, $\hat\theta[n]$ — соответствующие θ-константы (см. выше § 1). Тогда справедливо условие невырожденности:*

$$\text{ранг}\ (\hat\theta_{ij}[n],\ \hat\theta[n]) = \frac{g(g+1)}{2} + 1. \tag{4.3.4}$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдутся симметрическая $g \times g$-матрица λ_{ij} и число λ такие, что равенство

$$\sum_{i,\,j} \lambda_{ij}\hat\theta_{ij}[n] + \lambda\hat\theta[n] = 0 \tag{4.3.5}$$

выполняется для любой характеристики $n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^g$. Умножим это равенство на $\hat\theta[n](z)$ и просуммируем по всем $n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^g$. В силу теоремы сложения (4.1.5) получим

$$\sum \lambda_{ij}(\theta_{ij}(z)\theta(z) - \theta_i(z)\theta_j(z)) + \lambda\theta^2(z) = 0. \tag{4.3.6}$$

[1]) Оказывается, образ точек ветвления гауссова отображения (4.3.2) представляет собой поверхность в $\mathbb{C}P^{g-1}$, проективно-двойственную к канонической кривой Γ'. На этом наблюдении основано доказательство классической теоремы Торелли, утверждающей единственность восстановления римановой поверхности по ее матрице Римана. Для доведения этого доказательства до эффективных формул необходимо уметь решать трансцендентное уравнение $\theta(z) = 0$.

Подставим в это равенство в качестве z любой нуль θ-функции. Тогда $\sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i x_j = 0$, где $x_i = \theta_i(z)$, $\theta(z) = 0$. В силу утверждения В (см. выше), меняя точку $z \in (\theta)$, получим любое направление $(x_1, \ldots, x_g)$, поэтому симметрическая матрица λ_{ij} — нулевая. Отсюда и $\lambda = 0$, т. е. линейная комбинация (4.3.5) тривиальна. Лемма доказана.

Выше уже отмечалось, что из условия невырожденности (4.3.4) вытекает неразложимость якобианов $J(\Gamma)$ римановых поверхностей.

Вернемся к изучению свойств системы (4.2.4)

Лемма 4.3.2. *Для матриц B_{ij} с условием невырожденности* (4.3.4) *векторы V, W и константа d определяются из системы* (4.2.4) *по вектору U однозначно с точностью до преобразований вида*

$$(4.3.7) \qquad V \mapsto \pm(V + 2\alpha U), \qquad W \mapsto W + 3\alpha V + 3\alpha^2 U.$$

Доказательство. Допустим, одному вектору U отвечают два набора: V, W, d и $\widetilde{V}$, $\widetilde{W}$, $\widetilde{d}$. Вычитая соответствующие равенства (4.2.4) одно из другого, получим

$$(4.3.8) \qquad \sum_{ij} \left[\frac{3}{4} (V_i V_j - \widetilde{V}_i \widetilde{V}_j) - U_i (W_j - \widetilde{W}_j) \right] \hat{\theta}_{ij}[n] + (d - \widetilde{d})\, \hat{\theta}[n] = 0.$$

Из (4.3.4) следует, что все коэффициенты при $\hat{\theta}_{ij}[n]$ $(i \leqslant j)$, $\hat{\theta}[n]$ — нулевые:

$$(4.3.9) \qquad \begin{cases} \frac{3}{4} (V_i^2 - \widetilde{V}_i^2) - U_i (W_i - \widetilde{W}_i) = 0, \\ \frac{3}{2} (V_i V_j - \widetilde{V}_i \widetilde{V}_j) - U_i (W_j - \widetilde{W}_j) - U_j (W_i - \widetilde{W}_i) = 0, \\ d = \widetilde{d}. \end{cases}$$

Исключая из первой строчки разность $W_i - \widetilde{W}_i$ и подставляя $W_i - \widetilde{W}_i$ и $W_j - \widetilde{W}_j$ во вторую, получим

$$(U_i V_j - U_j V_i)^2 = (U_i \widetilde{V}_j - U_j \widetilde{V}_i)^2,$$

или

$$U_i (V_j \pm \widetilde{V}_j) - U_j (V_i \pm \widetilde{V}_i) = 0,$$

откуда $\widetilde{V} = \pm (V + 2\alpha U)$. Лемма доказана.

Изучим теперь, какие могут быть векторы U. Вспомним конструкцию из главы 3 точных решений уравнения КП. Согласно этой конструкции вектор $U = (U_1, \ldots, U_g)$, входящий в формулу решения (4.2.2), зависел от точки Q римановой поверхности Γ как от параметра, $U = U(Q)$, и строился как вектор b-периодов нормированного дифференциала Ω_Q второго рода с двойным полюсом в точке Q. Из леммы 2.1.2 (формула (2.1.21)) вытекает, что

$$(U_1(Q) : \ldots : U_g(Q)) = (\omega_1(Q) : \ldots : \omega_g(Q)).$$

Другими словами, отображение $Q \mapsto U(Q)$ совпадает с каноническим (4.3.1). Таким образом, совокупность векторов U, являющихся решениями системы (4.2.4), содержит каноническую кривую $\Gamma' = \omega(\Gamma)$. Покажем, что других решений U у системы (4.2.4) нет. Сначала рассмотрим случай $g = 2, 3$. Имеет место

Теорема 4.3.1. *Для $g = 2, 3$ любая матрица Римана B_{jk} с условием невырожденности* (4.3.4) *есть матрица периодов голоморфных дифференциалов на некоторой римановой поверхности Γ. Для $g = 2$ эта риманова* *поверхность задается уравнением*

$$(4.3.10)\qquad w^2 = P(z,\ 1),$$

где многочлен $P(U_1,\ U_2)$ *определен формулой* (4.1.18). *Для* $g = 3$ *негиперэллиптическая поверхность* Γ *задается в* $\mathbb{C}P^2$ *однородным уравнением четвертой степени*

$$(4.3.11)\qquad R(U) = \det(\hat{\theta}_{ij}[n],\ \hat{\theta}[n],\ \partial_U^4\hat{\theta}[n]) = 0.$$

Гиперэллиптический случай рода 3 *выделяется условием: уравнение* (4.3.11) *совместно с системой*

$$(4.3.12)\qquad P_{12}(U) = 0,\quad P_{13}(U) = 0,\quad P_{23}(U) = 0,$$

где многочлены $P_{ij}(U)$ *имеют вид* (4.2.18). *В этом случае кривая* (4.3.11) *рациональна* ($R(U)$ — *полный квадрат*) *и искомая риманова поверхность* Γ *является ее двулистным накрытием, а точки ветвления есть решение системы* (4.3.11), (4.3.12).

Доказательство. Пусть сначала B_{jk} есть матрица периодов голоморфных дифференциалов на римановой поверхности Γ. Тогда совокупность векторов U, являющихся решениями системы (4.2.4), содержит каноническую кривую Γ'. Для $g = 2$ $\Gamma' = \mathbb{C}P^1$, шести точкам Вейерштрасса на Γ отвечают такие точки $(U_1{:}U_2) \in \Gamma'$, для которых вектор $V = 0$ (и уравнение КП сводится к КдФ согласно результатам главы 3). Эти шесть точек как раз и ищутся из уравнения $P(U_1,\ U_2) = 0$, что и дает (4.3.10).

Для $g = 3$ каноническая кривая $\Gamma' = \omega(\Gamma)$ есть кривая четвертой степени, которая поэтому должна задаваться в $\mathbb{C}P^2$ уравнением (4.3.11). Для гиперэллиптической кривой Γ ее восемь точек Вейерштрасса переходят в такие точки $U \in \Gamma'$, для которых $V = 0$. В силу вычислений предыдущего параграфа такие точки U на Γ' как раз находятся из уравнений (4.3.12). Обратно, если система (4.3.11), (4.3.12) совместна, то вектор $V = 0$. В силу леммы 4.3.2 и конструкции вектора V из главы 3, V есть вектор b-периодов нормированного дифференциала Ω второго рода с единственным полюсом третьего порядка. Если $V = 0$, то $z = \int \Omega$ есть однозначная функция на Γ с единственным полюсом второго порядка. Такая функция дает двулистное накрытие $\Gamma \to \mathbb{C}P^1$, что означает гиперэллиптичность Γ.

Итак, мы доказали, что отображение

$$(4.3.13)\qquad \begin{array}{c}(\text{римановы поверхности рода } g)\\ \downarrow\\ (g \times g\text{-матрицы Римана})\end{array}$$

есть вложение при $g = 2{,}3$. Но размерности этих пространств одинаковы: $3g - 3 = g(g+1)/2$ для $g = 2,\ 3$; кроме того, оба они неприводимы. Следовательно, (4.3.13) — изоморфизм (почти всюду). Теорема доказана.

В качестве следствия из этой теоремы получаем использованные в § 1, 2 утверждения: для $g = 2$ и уравнения КП вектор $U = (U_1,\ U_2)$ — любой; для $g = 3$ и уравнения КП все соотношения на U исчерпываются уравнением (4.3.11).

В силу леммы 4.3.2 определена проекция совокупности ненулевых решений системы (4.2.4) в пространство $\mathbb{C}P_U^{g-1}$ с однородными координатами $(U_1{:}\ \ldots\ {:}U_g)$,

$$(4.3.14)\qquad (U,\ V,\ W,\ d) \mapsto U.$$

Эта проекция взаимно однозначна с точностью до преобразований вида (4.3.7).

Теорема 4.3.2. *Пусть* B_{jk} — *матрица периодов голоморфных дифференциалов на римановой поверхности* Γ *рода* $g \geqslant 2$. *Тогда для римановой* *поверхности* Γ *общего положения образ проекции* (4.3.14) *решений соответствующей системы* (4.2.4) *в пространстве* $\mathbb{C}P_U^{g-1}$ *есть каноническая кривая* $\Gamma' = \omega(\Gamma)$.

Другими словами, исключив из системы (4.2.4) переменные V, W, d, мы получим уравнения канонической кривой Γ'. Нелишне отметить, что замене матрицы B_{jk} на эквивалентную (в смысле § 3 главы 1) отвечает проективное преобразование кривой Γ' в пространстве $\mathbb{C}P_U^{g-1}$.

Доказательство теоремы. Для $g = 2, 3$ все уже доказано в теореме 4.3.2. Для $g \geqslant 4$ подставим в уравнение (4.2.3), эквивалентное системе (4.2.4), любую точку $z \in (\theta)_{\text{sing}}$. От уравнения (4.2.3) останется только один член:

$$\sum_{i,j} U_i U_j \theta_{ij}(z) = 0; \qquad \theta(z) = 0, \ \theta_i(z) = 0 \quad (i = 1, \ldots, g). \tag{4.3.15}$$

Разберем четыре случая.

а) Γ — общая кривая рода $g \geqslant 5$. В этом случае система (4.3.15) как раз высекает каноническую кривую согласно утверждению С.

б) Γ — гиперэллиптическая кривая. Тогда система (4.3.15) задает рациональную кривую $\Gamma' = \omega(\Gamma)$. Образы точек Вейерштрасса на Γ' отыскиваются из решения системы (4.2.4) совместно с системой $V_1 = \ldots = V_g = 0$.

в) Γ — тригональная кривая. Продифференцируем соотношение (4.2.3) по z_i $(i = 1, \ldots, g)$ и подставим в получившееся выражение особую точку тэта-дивизора ($\theta(z) = 0$, $\operatorname{grad}\theta(z) = 0$). После сокращения на $\theta_{xi}(z)$ получим

$$\sum_{i,j,k} U_i U_j U_k \theta_{ijk}(z) = 0,$$

что вместе с (4.3.15) дает каноническую кривую Γ'.

г) Случай, когда Γ — плоская кривая пятой степени, разбирается аналогично.

Теорема доказана.

Другое доказательство этой теоремы (пригодное для всех особых случаев, включая род $g = 4$) можно получить методами следующего параграфа.

Теорема 4.3.2 дает новое доказательство теоремы Торелли (см. подстрочное примечание в начале этого параграфа), более эффективное, поскольку для восстановления канонического уравнения алгебраической кривой по ее матрице Римана B_{jk} нужно выполнять только алгебраические операции (не нужно решать трансцендентное уравнение $\theta(z) = 0$).

§ 4. Проблема Римана о соотношениях между периодами голоморфных дифференциалов на римановой поверхности и гипотеза С. П. Новикова

Согласно гипотезе С. П. Новикова, совместность системы (4.2.4) дает набор соотношений на матрицу B_{jk}, необходимых и достаточных для того, чтобы B_{jk} была матрицей периодов некоторой римановой поверхности. Мы дадим здесь набросок доказательства этой гипотезы для одной из компонент многообразия таких матриц B_{jk}, для которых система (4.2.4) совместна. Вопрос о том, есть ли другие компоненты, остается открытым.

Для точной формулировки основного результата введем следующие объекты. Пусть M_g — многообразие, параметризующее римановы поверхности рода g («многообразие модулей» римановых поверхностей). Это многообразие неприводимо; его комплексная размерность равна $3g - 3$ при $g \geqslant 2$. Определено отображение периодов

$$M_g \to H_g/\Lambda_g, \tag{4.4.1}$$

где H_g — совокупность всех $g \times g$-матриц Римана (полуплоскость Зигеля), $\Lambda_g = \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ (см. § 3 главы 1), сопоставляющее каждой римановой поверхности ее матрицу периодов голоморфных дифференциалов. Через $\widetilde{M}_g$ обозначим естественное расслоение над M_g, где слоем над данной точкой является соответствующая кривая. Размерность многообразия $\widetilde{M}_g$ равна $3g-2$. Отображение периодов (4.4.1) очевидным образом продолжается до отображения

$$\widetilde{M}_g \to H_g/\Lambda_g. \tag{4.4.2}$$

Пусть N_g — график этого отображения. Введем теперь другое многообразие X_g, точками которого будут наборы (U, V, W, d, B), где $U, V, W \in \mathbb{C}^g$, $d \in \mathbb{C}$, $B \in H_g$, профакторизованные по действию таких групп:

$$\begin{cases} U \mapsto \lambda U, \quad V \mapsto \pm(\lambda^2 V + 2\alpha\lambda U), \\ W \mapsto \lambda^3 W + 3\lambda^2\alpha V + 3\lambda\alpha^2 U, \quad d \mapsto \lambda^4 d, \quad B \mapsto B \end{cases} \tag{4.4.3}$$

$(\lambda, \alpha \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0)$, и

$$\begin{cases} B' = 2\pi i(\alpha B + 2\pi i\beta)(\gamma B + 2\pi i\delta)^{-1}, \\ U' = 2\pi i M^{-1} U, \text{ где } M = \gamma B + 2\pi i\delta, \\ V' = 2\pi i M^{-1} V, \\ W' = 2\pi i M^{-1} W + \dfrac{2\pi i}{3} M^{-1} U \{U, U\}, \text{ где } \{X, Y\} = X^t M^{-1}\gamma Y, \\ d' = d + \dfrac{3}{8}\{V, V\} - \dfrac{1}{2}\{U, W\} - \dfrac{3}{4}\{U, U\}^2. \end{cases} \tag{4.4.4}$$

Здесь матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(g, \mathbb{Z})$.

Теорема 4.4.1. *Система* (4.2.4) *задает в* X_g *алгебраическое многообразие, одна из неприводимых компонент которого совпадает с графиком* N_g *отображения периодов* (4.4.2).

Проектируя эту компоненту на H_g/Λ_g, т. е. исключая из системы (4.2.4) переменные U, V, W, d, мы получаем полный набор соотношений между периодами голоморфных дифференциалов на римановых поверхностях.

Идея доказательства. Легко убедиться, что множество нулей Y_g системы (4.2.4) инвариантно относительно преобразований (4.4.3), (4.4.4), поэтому Y_g — алгебраическое подмногообразие в X_g. Ясно, что Y_g содержит N_g. Поэтому достаточно подсчитать размерность той компоненты $\hat{N}_g \subset Y_g$, которая содержит N_g. Для этого достаточно показать, что в общей точке $\hat{N}_g$ переменные d, B выражаются однозначно из системы (4.2.4) через переменные U, V, W с отношением эквивалентности (4.4.3). Действительно, группа (4.4.3) двумерна, и среди параметров U, V, W ровно $3g-2$ независимых. Достаточно доказать это для таких матриц B, у которых диагональные элементы B_{ii} стремятся к $-\infty$. Такие матрицы отвечают рациональным кривым с g двойными точками. В этом случае система (4.2.4) решается явно «по теории возмущений» в виде ряда по степеням $\varepsilon_i = \exp B_{ii}$, причем любой член ряда выписывается эффективными формулами. Отсюда легко вытекает утверждение о размерности $\hat{N}_g$, что и завершает доказательство.

Теорема 4.3.2 также может быть доказана «по теории возмущений», включая перечисленные в § 3 особые случаи. Подробные вычисления и доказательство теоремы 4.4.1 см. в [45].

В заключение этой главы отметим, что развитые здесь методы применимы и для других нелинейных уравнений, интегрируемых в тэта-функциях.

ГЛАВА 5
ПРИМЕРЫ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В ДВУМЕРНЫХ ТЭТА-ФУНКЦИЯХ

§ 1. Двухзонные потенциалы

Согласно схеме главы 3, гиперэллиптическая кривая Г рода 2 вида

(5.1.1) $$w^2 = P_5(z),\ P_5(z) = (z - z_1)\ \dots\ (z - z_5)$$

и точка Вейерштрасса $z = \infty$ на ней порождает пару коммутирующих операторов L, A,

(5.1.2) $$[L, A] = 0,$$

где

(5.1.3) $$L = d^2/dx^2 + u,$$

(5.1.4) $$A = 16\frac{d^5}{dx^5} + 20\left(u\frac{d^3}{dx^3} + \frac{d^3}{dx^3}u\right) + 30u\frac{d}{dx}u - -5\left(u''\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u''\right) + c_1\left[4\frac{d^3}{dx^3} + 3\left(u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}u\right)\right] + c_2\frac{d}{dx}.$$

Уравнение коммутативности (5.1.2) на функцию $u = u(x)$ (один из важных примеров уравнений С. П. Новикова) может быть записано в лагранжевом виде

(5.1.5) $$\delta\left(\int \Lambda\,dx\right)\Big/\delta u(x) = 0$$

с лагранжианом

(5.1.6) $$\Lambda = \Lambda(u, u', u'') = \frac{u''^2}{2} - \frac{5}{2}u''u^2 + \frac{5}{2}u^4 + + c_1\left(\frac{u'^2}{2} + u^3\right) + c_2u^2 + c_3u$$

(c_1, c_2, c_3 — константы, $\delta/\delta u(x)$ — вариационная производная). Согласно теории вариационных задач с высшими производными (см. [13]), уравнение (5.1.5) эквивалентно гамильтоновой системе с двумя степенями свободы и гамильтонианом

(5.1.7) $$H = p_1p_2 + V(q_1, q_2).$$

Здесь

(5.1.8) $$q_1 = u,\quad q_2 = u'' - 5u^2,\quad p_1 = q_2',\quad p_2 = u',$$

(5.1.9) $$V = -\frac{q_2^2}{2} - \frac{5}{2}q_2q_1^2 - \frac{5}{8}q_1^4 + \frac{c_2}{2}q_1^2 + c_3q_1,$$

причем заменой $u \mapsto u + \mathrm{const}$ мы занулили константу c_1. Система (5.1.7) вполне интегрируема; ее интегралы в инволюции имеют вид $J_1 = H$,

(5.1.10) $$J_2 = p_1^2 + 2q_1p_1p_2 + (2q_2 - c_2)p_2^2 + D(q_1, q_2),$$

(5.1.11) $$D = q_1^5 + c_2q_1^3 - 4q_1q_2^2 + 2c_2q_1q_2 + 2c_3q_2.$$

Явные координаты γ_1, γ_2 на поверхности уровня $J_1 = \mathrm{const}$, $J_2 = \mathrm{const}$ имеют вид

(5.1.12) $$\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{u}{2},\quad \gamma_1\gamma_2 = \frac{1}{8}(3u^2 + u'') + \frac{1}{2}\sum_{i<j} z_iz_j.$$

Здесь $z_1, \dots, z_5$ — нули многочлена $P_5(z)$ вида

(5.1.13) $$P_5(z) = z^5 + \frac{1}{8}c_2z^3 + \frac{1}{16}c_3z^2 + \left(\frac{1}{32}J_1 + \frac{1}{16}c_2^2\right)z + \frac{J_2 - c_2c_3}{2^8}.$$

В этих переменных система (5.1.5) запишется в виде

(5.1.14) $$\gamma_1' = \frac{2i\sqrt{P_5(\gamma_1)}}{\gamma_1 - \gamma_2},\quad \gamma_2' = \frac{2i\sqrt{P_5(\gamma_2)}}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Система (5.1.14) совпадает с точностью до множителя $2i$ с системой (2.4.55), которая возникла в теории обращения Якоби. Эта система интегрируется преобразованием Абеля, и явное решение уравнения (5.1.5) имеет вид, согласно главе 3,

$$u(x)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\theta(Ux+z_0)+c. \tag{5.1.15}$$

Здесь θ-функция Римана строится по римановой поверхности (5.1.1) (где многочлен $P_5(z)$ имеет вид (5.1.13)); U — вектор b-периодов нормированного дифференциала второго рода Ω с полюсом в точке $z=\infty$ и главной частью вида $d(\sqrt{z})$:

$$\Omega=\frac{z^2+az+b}{2\sqrt{P_5(z)}}dz, \tag{5.1.15$'$}$$

$$\oint_{a_1}\Omega=\oint_{a_2}\Omega=0;\quad U_i=\oint_{b_i}\Omega\quad (i=1,\ 2).$$

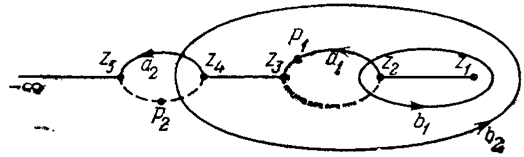

Рис. 4. Спектр двухзонного потенциала. a_1, a_2, b_1, b_2 — базисные циклы на римановой поверхности.

Решения «нумеруются» произвольным двумерным вектором z_0:

$$z_0=-A(P_1,\ P_2)-K \tag{5.1.16}$$

(см. § 1 главы 3); P_1, P_2 — точки римановой поверхности Г (неспециальный дивизор степени 2).

Пусть корни $z_1>\ldots>z_5$ многочлена $P_5(z)$ вещественны (и различны). Пусть, далее, точки P_1, P_2, задающие решение u, имеют вид

$$P_1=(\gamma_1,\ \sqrt{P_5(\gamma_1)}),\quad P_2=(\gamma_2,\ \sqrt{P_5(\gamma_2)}), \tag{5.1.17}$$

где γ_1, γ_2 — вещественные числа, причем

$$z_3\leqslant\gamma_1\leqslant z_2,\quad z_5\leqslant\gamma_2\leqslant z_4. \tag{5.1.17$'$}$$

Тогда функция $u(x)$ почти-периодическая с двумя независимыми периодами. Спектр оператора $L=d^2/dx^2+u(x)$ в $\mathscr{L}_2(-\infty,\ \infty)$ представляет собой луч $(-\infty,\ z_1]$ с двумя лакунами $(z_5,\ z_4)$ и $(z_3,\ z_2)$ (рис. 4). Это означает, что $u(x)$ — «двухзонный» потенциал. Условие (5.1.17) означает, что точки P_1, P_2 на римановой поверхности Г лежат на циклах над лакунами. Собственная функция ψ оператора L,

$$L\psi=z\psi, \tag{5.1.18}$$

мероморфна на поверхности $\Gamma\setminus\infty$, имеет полюсы в точках P_1, P_2 и экспоненциальную асимптотику при $P\to\infty$, т. е. является функцией Бейкера — Ахиезера. Она имеет вид

$$\psi(x,\ P)=\exp\left(x\int_\infty^P\Omega\right)\frac{\theta(A(P)+xU+z_0)\,\theta(z_0)}{\theta(A(P)+z_0)\,\theta(xU+z_0)}. \tag{5.1.19}$$

Поясним обозначения: $\int$ — главное значение интеграла; $A(P)$ — отображение Абеля,

$$A(P)=(A_1(P),\ A_2(P))=\left(\int_\infty^P\omega_1,\ \int_\infty^P\omega_2\right), \tag{5.1.20}$$

где

$$\omega_1=\frac{a_1z+b_1}{\sqrt{P_5(z)}}dz,\qquad \omega_2=\frac{a_2z+b_2}{\sqrt{P_5(z)}}dz \tag{5.1.21}$$

— нормированный базис голоморфных дифференциалов на Г. Собственная функция (5.1.19) оператора L — *блоховская*: группа периодов логарифмической производной ψ'/ψ совпадает с группой периодов потенциала $u(x)$. Таким образом, потенциал $u(x)$ в этом случае имеет правильные аналитические свойства. Риманова поверхность Г называется в этом случае *спектром* оператора L.

Разумеется, гиперэллиптические поверхности рода $g \geqslant 2$ приводят к конечно-зонным потенциалам с g лакунами в спектре. Случай $g = 2$ выделяется эффективностью. Согласно § 1 главы 4, двухзонный потенциал можно построить путем следующих элементарных операций:

1) Берем любую (неразложимую) матрицу Римана

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix};$$

строим по ней θ-функцию $\theta(z_1, z_2)$ по формуле (1.1.1).

2) Берем любое решение $U = (U_1, U_2)$ уравнения (4.1.18). Тогда потенциал

$$u(x) = 2\partial^2/\partial x^2 \ln \theta(xU + z_0) \tag{5.1.22}$$

будет двухзонным (z_0 — произвольный вектор). Его спектр (риманова поверхность Г) задается уравнением (4.3.10). Так получаются все двухзонные потенциалы.

§ 2. Задача С. В. Ковалевской

Уравнения движения тяжелого твердого тела с закрепленной точкой в случае Ковалевской имеют вид

$$\begin{cases} 2\dot{p} = qr, & \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ 2\dot{q} = -pr - \mu\gamma_3, & \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dot{r} = \mu\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2 \end{cases} \tag{5.2.1}$$

($\mu = \text{const}$). Эти уравнения имеют следующие интегралы:

$$\begin{cases} H = 2(p^2+q^2)+r^2-2\mu\gamma_1 & \text{(энергия)}, \\ L = 2(p\gamma_1+q\gamma_2)+r\gamma_3 & \text{(момент импульса)}, \\ K = (p^2-q^2+\mu\gamma_1)^2+(2pq+\mu\gamma_2)^2 & \text{(интеграл Ковалевской)}. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

Кроме того, выполнено условие связи

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{5.2.3}$$

Рассмотрим совместную поверхность уровня этих интегралов

$$H = 6h, \quad L = 2l, \quad K = k^2, \tag{5.2.4}$$

где h, l, k^2 — константы. При выполнении условия связи (5.2.3) эти уравнения задают двумерную поверхность (инвариантное многообразие динамической системы (5.2.1)). Введем координаты s_1, s_2 на этой поверхности (переменные Ковалевской), полагая

$$s_{1,2} = 3h + \frac{R(x_1, x_2) \mp \sqrt{R(x_1)R(x_2)}}{(x_1-x_2)^2}, \tag{5.2.5}$$

где $x_{1,2} = p \pm iq$, $R(z) = -z^4 + 6hz^2 + 4\mu lz + \mu^2 - k^2$,

$$R(x_1, x_2) = -x_1^2x_2^2 + 6hx_1x_2 + 2\mu l(x_1 + x_2) + \mu^2 - k^2. \tag{5.2.6}$$

Легкое вычисление показывает, что в переменных s_1, s_2 уравнения (5.2.1) запишутся так:

$$\dot{s}_1 = \frac{i\sqrt{P_5(s_1)}}{2(s_1 - s_2)}, \quad \dot{s}_2 = \frac{i\sqrt{P_5(s_2)}}{2(s_2 - s_1)}, \tag{5.2.7}$$

где $P_5(z)$ — многочлен пятой степени, имеющий вид

$$P_5(z) = \{z[(z-3h)^2 + \mu^2 - k^2] - 2\mu^2 l^2\}((z-3h)^2 - k^2). \tag{5.2.8}$$

Уравнения (5.2.7) совпадают (с точностью до множителя) с разобранным § 1 уравнением коммутативности (5.1.2) на поверхности уровня двух интегралов. Эти уравнения интегрируются преобразованием Абеля $\Gamma \to J(\Gamma)$, где риманова поверхность Γ рода 2 задана уравнением

$$w^2 = P_5(z). \tag{5.2.9}$$

Выражение переменных Ковалевской через θ-функции на торе $T^4 = J(\Gamma)$ извлекается из § 4 главы 2. Выражение исходных переменных p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 через переменные Ковалевской можно найти в книге [10].

§ 3. Задачи Неймана и Якоби. Общая система Гарнье

В задаче Неймана о движении частицы на двумерной сфере

$$x^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1 \tag{5.3.1}$$

под действием квадратичного потенциала

$$U(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} a_i x_i^2, \qquad a_i = \mathrm{const}, \tag{5.3.2}$$

уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x}_i = -a_i x_i + \lambda(t) x_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5.3.3}$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1, \tag{5.3.3'}$$

где $\lambda(t)$ — множитель Лагранжа, возникающий из-за наложения связи (5.3.1). Система (5.3.3), (5.3.3′) может быть получена из гамильтонова потока на $\mathbb{R}^6$ с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} a_i x_i^2 + \frac{1}{2}(x^2 y^2 - (xy)^2) \tag{5.3.4}$$

ограничением на поверхность $x^2 = 1$ (здесь $xy = \sum x_i y_i$). Функции

$$F_k(x, y) = x_k^2 + \sum_{i \neq k} \frac{(x_k y_i - x_i y_k)^2}{a_i - a_k} \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{5.3.5}$$

являются системой независимых интегралов в инволюции для системы с гамильтонианом (5.3.4). Сам гамильтониан H имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} a_i F_i. \tag{5.3.6}$$

Преобразование

$$x' = y, \quad y' = -x, \quad H' = \sum_{i=1}^{3} a_i^{-1} F_i \tag{5.3.7}$$

переводит построенный гамильтонов поток в геодезический поток на трехосном эллипсоиде (при положительных a_i)

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i} = 1. \tag{5.3.8}$$

Задача о геодезических на трехосном эллипсоиде называется *задачей Якоби.*

Покажем, что задача Неймана (а значит, и задача Якоби) интегрируется в тэта-функциях рода 2. Мы сведем задачу Неймана, следуя работам [28], [29], к разобранной в § 1 задаче о двухзонных потенциалах.

Пусть ψ_1, ψ_2, ψ_3 — собственные функции оператора $L = d^2/dx^2 + u(x)$ с собственными значениями $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$ соответственно, т. е. решения уравнений

$$L\psi_i = -a_i\psi_i \quad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{5.3.9}$$

Эти уравнения переписываются в виде

$$\psi_i'' = -a_i\psi_i - u(x)\psi_i, \tag{5.3.10}$$

совпадающими с уравнениями (5.3.3) задачи Неймана после переобозначения $x \to t$, $\psi_i \to x_i$, $-u(x) \to \lambda(t)$ (λ — множитель Лагранжа). Осталось удовлетворить уравнению связи $\sum x_i^2 = 1$. Для этого выберем потенциал $u(x)$ двухзонным, причем так, чтобы числа $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$ попали в концы зон спектра (см. рис. 4), по одному на каждую зону. Например, возьмем такие концы зон:

$$z_5 = -a_3 < z_4 < z_3 = -a_2 < z_2 < z_1 = -a_1, \tag{5.3.11}$$

где риманова поверхность Γ (спектр оператора L) имеет вид

$$w^2 = P_5(z), \qquad P_5(z) = \prod_{i=1}^{5} (z - z_i). \tag{5.3.12}$$

Решения ψ_1, ψ_2, ψ_3 уравнения (5.3.9) выберем так: пусть $\psi(x, P)$ — блоховская собственная функция оператора L, мероморфная на римановой поверхности (5.3.12) (функция Бейкера — Ахиезера). Положим

$$\psi_i(x) = \alpha_i\psi(x, -a_i), \tag{5.3.13}$$

где

$$\alpha_i = \Big[\prod_{j\neq i} (a_i - a_j)\Big]^{-1/2}. \tag{5.3.14}$$

Имеет место простое

Утверждение. *Функции* ψ_1, ψ_2, ψ_3 *вида* (5.3.14), (5.3.13) *удовлетворяют уравнению связи*

$$\psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 \equiv 1. \tag{5.3.15}$$

Доказательство приведено в [29].

Из формулы (5.1.19) для блоховской функции $\psi(x, P)$ и формулы (5.3.13) сразу получаем вид общего решения задачи Неймана. Например, для концов зон (5.3.11) и базиса циклов, изображенного на рис. 4, получаем такие решения:

$$x_1(t) = \alpha_1 \frac{\theta[(0,\ 1/2),\ (0,\ 0)](tU + z_0)\,\theta(z_0)}{\theta[(0,\ 1/2),\ (0,\ 0)](z_0)\,\theta(tU + z_0)},$$

$$x_2(t) = \alpha_2 \frac{\theta[(1/2,\ 0),\ (0,\ 1/2)](tU + z_0)\,\theta(z_0)}{\theta[(1/2,\ 0),\ (0,\ 1/2)](z_0)\,\theta(tU + z_0)},$$

$$x_3(t) = \alpha_3 \frac{\theta[(0,\ 0),\ (1/2,\ 1/2)](tU + z_0)\,\theta(z_0)}{\theta[(0,\ 0),\ (1/2,\ 1/2)](z_0)\,\theta(tU + z_0)}.$$

Здесь константы α_1, α_2, α_3 имеют вид (5.3.14); θ-функции построены по римановой поверхности (5.3.12); z_0 — произвольный двумерный вектор (точка якобиана $J(\Gamma)$); вектор U такой же, как и в § 1. Для получения вещественных решений точка z_0 должна иметь вид (5.1.16) — (5.1.17). Интегрирование задачи Якоби теперь получается после применения формул (5.3.7).

Разобранные нами детально системы Неймана и Якоби с двумя степенями свободы почти автоматически переписываются для больших размерностей. Интегрирование этих систем всегда может быть сведено к конечнозонным потенциалам (см. [28], [29]).

Система Неймана может быть также получена из более общей интегрируемой системы, открытой Гарнье [40],

$$\text{(5.3.16)}\qquad \begin{cases} x_i'' = x_i\left(\sum x_j y_j + a_i\right), \\ y_i'' = y_i\left(\sum y_j x_j + a_i\right) \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{cases}$$

На инвариантной плоскости $x_i = a_i y_i$ как раз получаем систему Неймана на сфере. Другой интересный случай — это система ангармонических осцилляторов, получающаяся из (5.3.16) ограничением на плоскость $x_i = y_i$. Система Гарнье эквивалентна (при подходящем выборе параметра τ) условиям коммутации

$$\text{(5.3.17)}\qquad dA(\lambda)/d\tau = [A(\alpha),\ A(\lambda)]/(\lambda - \alpha),$$

где матрица $A = (A_{ij})$ имеет вид

$$\text{(5.3.18)}\qquad \begin{cases} A_{11} = \lambda^2 - \sum x_i y_i; \\ A_{1i} = x_{i-1}\lambda + x_{i-i}'; \qquad A_{i1} = y_{i-1}\lambda - y_{i-1}'; \\ A_{ij} = x_{i-1}y_{i-1} - a_{i-1}\delta_{ij} \qquad (i,\ j = 2,\ \ldots,\ n+1). \end{cases}$$

Эта система интегрируется в тэта-функциях римановой поверхности вида

$$\text{(5.3.19)}\qquad R(\lambda,\ \mu) \equiv \det(A(\lambda) - \mu\cdot 1) = 0.$$

§ 4. Движение тела в идеальной жидкости. Интегрирование случая Клебша. Многомерное твердое тело

Уравнения движения твердого тела в идеальной жидкости имеют вид (см. [30])

$$\text{(5.4.1)}\qquad \begin{cases} \dot p_1 = p_2 \dfrac{\partial H}{\partial l_3} - p_3 \dfrac{\partial H}{\partial l_2}, \\ \dot p_2 = p_3 \dfrac{\partial H}{\partial l_1} - p_1 \dfrac{\partial H}{\partial l_3}, \\ \dot p_3 = p_1 \dfrac{\partial H}{\partial l_2} - p_2 \dfrac{\partial H}{\partial l_1}, \\ \dot l_1 = p_2 \dfrac{\partial H}{\partial p_3} - p_3 \dfrac{\partial H}{\partial p_2} + l_2 \dfrac{\partial H}{\partial l_3} - l_3 \dfrac{\partial H}{\partial l_2}, \\ \dot l_2 = p_3 \dfrac{\partial H}{\partial p_1} - p_1 \dfrac{\partial H}{\partial p_3} + l_3 \dfrac{\partial H}{\partial l_1} - l_1 \dfrac{\partial H}{\partial l_3}, \\ \dot l_3 = p_1 \dfrac{\partial H}{\partial p_2} - p_2 \dfrac{\partial H}{\partial p_1} + l_1 \dfrac{\partial H}{\partial l_2} - l_2 \dfrac{\partial H}{\partial l_1}, \end{cases}$$

где H — гамильтониан. Эти уравнения имеют очевидные интегралы

$$\text{(5.4.2)}\qquad I_1 = H,\ I_2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2,\ I_3 = p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3.$$

Для случая, когда гамильтониан H представляет собой квадратичную форму,

$$\text{(5.4.3)}\qquad 2H = \sum_{j,\ k} (a_{jk} l_j l_k + 2b_{jk} l_j p_k + c_{jk} p_j p_k),$$

система (5.4.1) является уравнением геодезических правоинвариантной метрики на группе $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства. Система (5.4.1) гамильтонова на орбитах коприсоединенного представления группы $E(3)$, задаваемых уравнениями $I_2 = \mathrm{const}$, $I_3 = \mathrm{const}$. Для интегрирования этой системы достаточно иметь еще один интеграл. Он тривиально отыскивается для симметричного случая, где интегрирование уравнений (5.4.1) дается в эллиптических функциях (см. [30]). Для движения тела общей (несимметричной) формы известны следующие случаи интегрируемости:

1) Случай Клебша.

$$2H = a_1 l_1^2 + a_2 l_2^2 + a_3 l_3^2 + c_1 p_1^2 + c_2 p_2^2 + c_3 p_3^2, \tag{5.4.4}$$

причем

$$\frac{c_2 - c_3}{a_1} + \frac{c_3 - c_1}{a_2} + \frac{c_1 - c_2}{a_3} = 0. \tag{5.4.5}$$

Четвертый интеграл имеет вид

$$2I_4 = \lambda (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + (a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + a_3 p_3^2), \tag{5.4.6}$$

где константа λ определяется из условий

$$\lambda = \frac{a_1 (a_2 - a_3)}{c_2 - c_3} = \frac{a_2 (a_3 - a_1)}{c_3 - c_1} = \frac{a_3 (a_1 - a_2)}{c_1 - c_2} \tag{5.4.7}$$

(уравнения (5.4.5) и (5.4.7) равносильны).

2) Случай Ляпунова — Стеклова — Колосова.

$$2H = a_1 l_1^2 + a_2 l_2^2 + a_3 l_3^2 + c_1 p_1^2 + c_2 p_2^2 + c_3 p_3^2 + 2b_1 p_1 l_1 + 2b_2 p_2 l_2 + 2b_3 p_3 l_3, \tag{5.4.8}$$

причем

$$b_j = \mu (a_1 a_2 a_3) a_j^{-1} + \gamma \ (j = 1, 2, 3), \tag{5.4.9}$$

$$c_1 = \mu^2 a_1 (a_2 - a_3)^2 + \nu', \ \ldots \tag{5.4.9$'$}$$

Четвертый интеграл имеет вид

$$2I_4 = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - \mu (a_1 p_1 l_1 + a_2 p_2 l_2 + a_3 p_3 l_3) + C_1 p_1^2 + C_2 p_2^2 + C_3 p_3^2, \tag{5.4.10}$$

где

$$C_1 = \mu^2 (a_2 - a_3)^2, \ \ldots \tag{5.4.10$'$}$$

Перечисленные случаи исчерпывают все возможности, когда у системы (5.4.1) с гамильтонианом вида (5.4.3) существует четвертый квадратичный по l, p интеграл (см. [31]). Уравнения (5.4.1) для случая Клебша проинтегрированы в θ-функциях в работах [32] — [34]; для случая Ляпунова — Стеклова — Колосова интегрирование (насколько известно автору [1])) до конца не доведено.

Введем координаты на поверхности уровня интегралов $I_1, \ldots, I_4$ для случая Клебша. Беря линейную комбинацию интегралов I_1 и I_2 и заменяя $a_i \mapsto \lambda a_i$ $(i = 1, 2, 3)$, перепишем уравнения этой поверхности в виде

$$\begin{cases} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = k_0, \\ a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + a_3 p_3^2 + l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = k_1, \\ -(a_2 a_3 p_1^2 + a_1 a_3 p_2^2 + a_1 a_2 p_3^2) + a_1 l_1^2 + a_2 l_2^2 + a_3 l_3^2 = k_2, \\ p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 = k_3, \end{cases} \tag{5.4.11}$$

[1]) После написания этого обзора автору стало известно, что случай Ляпунова — Стеклова проинтегрирован в работе [52].

где $k_0, \ldots, k_3$ — константы. Пусть $s_1, \ldots, s_4$ — корни уравнения

$$(5.4.12)\qquad k_0^2[s^2-s(a_1+a_2+a_3)]+k_1 s-k_2+ \\ +2k_3\sqrt{(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)}=0.$$

Положим

$$(5.4.13)\qquad \psi(s)=(s-s_1)\ldots(s-s_4);$$

перейдем от переменных p_j, l_k к переменным ξ_j^+, ξ_j^-, полагая

$$(5.4.14)\qquad \xi_k^\pm = p_k\left[\frac{\sqrt{(s_1-a_1)(s_1-a_2)(s_1-a_3)}}{\sqrt{s_1-a_k}\sqrt{\psi'(s_1)}} \pm i\frac{\sqrt{(s_2-a_1)(s_2-a_2)(s_2-a_3)}}{\sqrt{s_2-a_k}\sqrt{\psi'(s_2)}}\right]+ \\ +l_k\left[\frac{\sqrt{s_1-a_k}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}\pm i\frac{\sqrt{s_2-a_k}}{\sqrt{\psi'(s_2)}}\right].$$

Пусть z_1, z_2 — корни уравнения

$$(5.4.15)\qquad \frac{(\xi_1^-)^2}{d_1^2-z}+\frac{(\xi_2^-)^2}{d_2^2-z}+\frac{(\xi_3^-)^2}{d_3^2-z}=0$$

(«эллиптические координаты»), где

$$(5.4.16)\qquad d_k=\frac{\dfrac{\sqrt{s_3-a_k}}{\sqrt{\psi'(s_3)}}+i\dfrac{\sqrt{s_4-a_k}}{\sqrt{\psi'(s_4)}}}{\dfrac{\sqrt{s_1-a_k}}{\sqrt{\psi'(s_1)}}+i\dfrac{\sqrt{s_2-a_k}}{\psi'(s_2)}}.$$

Нетрудно выразить координаты $\xi_k^\pm$ (а значит, и p_j, l_k) через z_1, z_2. Это означает, что z_1, z_2 — искомые координаты на поверхности уровня (5.4.11). Непосредственное вычисление показывает, что уравнения (5.4.1) в случае Клебша перепишутся на поверхности уровня (5.4.11) в виде

$$(5.4.17)\qquad \frac{dz_1}{dt}=\frac{(az_2+b)\sqrt{R(z_1)}}{z_2-z_1},\quad \frac{dz_2}{dt}=\frac{(az_2+b)\sqrt{R(z_2)}}{z_1-z_2},$$

где $R(z)$ — многочлен пятой степени,

$$(5.4.18)\qquad R(z)=z(z-d_1^2)(z-d_2^2)(z-d_3^2)(z-d_1^2d_2^2d_3^2);$$

явный вид констант a и b мы не приводим. Система (5.4.17) является линейной комбинацией систем (2.4.55) и (2.4.56) и интегрируется преобразованием Абеля $\Gamma \xrightarrow{A} J(\Gamma)$, где риманова провехность Γ рода 2 имеет вид

$$(5.4.19)\qquad w^2=R(z).$$

Следовательно, уравнения (5.4.1) в случае Клебша интегрируются в тэта-функциях рода 2.

Приведем теперь еще один пример вполне интегрируемых систем: уравнения Эйлера движения многомерного твердого тела. Эти уравнения имеют вид (см. [44])

$$(5.4.20)\qquad \dot M=[\Omega, M],$$

где

$$(5.4.21)\qquad M=I\Omega+\Omega I,$$

I — оператор инерции твердого тела,

$$(5.4.22)\qquad I=\begin{pmatrix} I_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & I_n\end{pmatrix}.$$

Полная интегрируемость системы (5.4.20) при всех n доказана С. В. Манаковым [41]. Доказательство полной интегрируемости основано не представлении этой системы в эквивалентном виде

(5.4.23) $$[A, \dot{V}] = [[A, V], [B, V]],$$

где

(5.4.23′) $$[B, V] = \Omega, \quad A = I^2, \quad B = I.$$

Системы (5.4.23) были явно проинтегрированы автором [42]. Все они имеют коммутационное представление вида

(5.4.24) $$\left[\frac{d}{dt} - [B, V] + zB, \quad zA - [A, V]\right] = 0$$

на матрицах, зависящих от лишнего параметра z; поэтому их решения выражаются через θ-функции римановых поверхностей Γ вида

(5.4.25) $$\det(zA - [A, V] - w\cdot 1) = 0.$$

Совокупность этих поверхностей Γ совпадает с совокупностью всех плоских неособых алгебраических кривых (в $\mathbb{C}P^2$) степени n (их род равен $(n-1)(n-2)/2$) и их вырождений. Явные формулы для общего решения системы (5.4.23) могут быть получены из [42] и имеют вид $V = (v_{ij})$, где

(5.4.26) $$v_{ij} = \pm \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \frac{\theta(A(P_i) - A(P_j) + tU + z_0)}{\theta(tU + z_0)\,\varepsilon(P_i, P_j)} \qquad (i \neq j)$$

(5.4.27) $$\varepsilon(P, Q) = \frac{\sqrt{\partial_{U(P)}\theta[\nu](0)\,\partial_{U(Q)}\theta[\nu](0)}}{\theta[\nu](A(P) - A(Q))},$$

(5.4.28) $$\lambda_i = \lambda_i^0 \exp\left\{t \sum_{k \neq i} c_i^k b_k\right\},$$

(5.4.28′) $$c_i^k = -\frac{d}{dP} \ln \varepsilon(P, P_i)|_{P=P_k}.$$

Здесь $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_n^0$ — произвольные ненулевые константы; θ-функция построена по кривой вида (5.4.25); $P_1, \ldots, P_n$ — бесконечно удаленные точки этой кривой, где $w/z \to a_i$ при $P \to P_i$; вектор U имеет вид

(5.4.29) $$U = \sum_{j=1}^{n} b_j U(P_j),$$

где $U(P)$ — вектор периодов дифференциалов Ω_P с двойным полюсом в P; z_0 — произвольный вектор; наконец, ν — любой невырожденный (т. е. $\operatorname{grad} \theta[\nu](0) \neq 0$) нечетный полупериод.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ НЕАБЕЛЕВА ЦЕПОЧКА ТОДА И ЕЕ ДВУМЕРНОЕ ОБОБЩЕНИЕ

И. М. Кричевер

Уравнения неабелевой цепочки Тода были предложены А. Поляковым, нашедшим для них и полиномиальные интегралы. Эти уравнения, имеющие вид

(1) $$\partial_t(\partial_t g_n \cdot g_n^{-1}) = g_{n-1} g_n^{-1} - g_n g_{n+1}^{-1}, \qquad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t},$$

где g_n — матрицы порядка l, допускают коммутационное представление типа Лакса $\partial_t L = [P, L]$. Здесь

(2) $$L\psi_n = g_n g_{n+1}^{-1} \psi_{n+1} - \dot{g}_n g_n^{-1} \psi_n + \psi_{n-1}, \qquad \dot{g}_n = \partial_t g_n,$$

(3) $$P\psi_n = \frac{1}{2}(g_n g_{n+1}^{-1} \psi_{n+1} + \dot{g}_n g_n^{-1} \psi_n - \psi_{n-1}).$$

Используя это представление, в настоящей работе получены явные выражения через θ-функции Римана для периодических решений, $g_{n+N} = g_n$, уравнений (1).

В отличие от непрерывного случая, когда алгебро-геометрические конструкции дают лишь так называемые конечно-зонные решения, в разностном варианте все периодические решения уравнений Лакса оказываются алгебро-геометрическими. Это связано с тем, что оператор сдвига на период, с которым коммутирует L, является разностным оператором.

В работе [46] автором была получена классификация коммутирующих разностных операторов (см. также [47]). Там же была предложена конструкция квазипериодических решений разностных уравнений типа Захарова—Шабата и Лакса. Помимо общих решений подобного типа, у неабелевой цепочки Тода имеются сепаратрисные семейства решений, в терминологии [14] конечно-зонные решения ранга $l > 1$. Их размерность больше половины размерности фазового пространства.

Напомним сначала схему интегрирования ([15], [46]) «обычной» цепочки Тода

$$\begin{cases} \dot{v}_n = c_{n+1} - c_n, \\ \dot{c}_n = c_n(v_n - v_{n-1}). \end{cases} \tag{4}$$

Пусть R — гиперэллиптическая риманова поверхность рода g вида

$$w^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (z - z_i); \tag{5}$$

P^+ и P^- — точки кривой R вида $P^\pm = (\infty, \pm)$. Для интегрирования системы (4) вводится функция Бейкера — Ахиезера $\psi(n, t, P)$, мероморфная на R всюду, кроме точек P^+, P^-, имеющая там g полюсов и при $P \to P^\pm$ асимптотику вида

$$\psi(n, t, P)\,|_{P \to P^\pm} = i^n \lambda_n^{\pm 1} z^{\pm n} (1 + \xi_1^\pm(n, t) z^{-1} + \ldots) \exp\left(\mp \frac{tz}{2}\right). \tag{6}$$

Для этой функции существуют разностные операторы $L = (L^{nm})$ и $A = (A^{nm})$ такие, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = A\psi, \quad L\psi = z\psi. \tag{7}$$

Эти операторы имеют вид

$$L^{nm} = -i\sqrt{c_{n+1}}\,\delta_{n,m-1} + v_n \delta_{n,m} + i\sqrt{c_n}\,\delta_{n,m+1}, \tag{8}$$

$$A^{nm} = \frac{i}{2}\sqrt{c_{n+1}}\,\delta_{n,m-1} + w_n \delta_{n,m} + \frac{i}{2}\sqrt{c_n}\,\delta_{n,m+1}. \tag{9}$$

Здесь $w_n - w_{n-1} = \frac{1}{2}(v_n - v_{n-1}) - \frac{1}{2}(\ln c_n)^{\cdot}$, причем

$$\sqrt{c_n} = \lambda_{n-1}/\lambda_n, \tag{9'}$$

$$v_n = \xi_1^+(n+1, t) - \xi_1^+(n, t). \tag{9''}$$

Условие совместности системы (7) совпадает с уравнениями цепочки Тода. Выражая функцию Бейкера — Ахиезера (6) через тэта-функции поверхности R и вычисляя коэффициенты λ_n, $\xi_1^+(n, t)$, получаем явный вид решений цепочки Тода:

$$v_n = \frac{d}{dt} \ln \frac{\theta((n+1)U+tV+z_0)}{\theta(nV+tV+z_0)}, \tag{10}$$

$$c_n = \frac{\theta((n+1)U+Vt+z_0)\,\theta((n-1)U+Vt+z_0)}{\theta^2(nU+Vt+z_0)}. \tag{11}$$

Здесь z_0 — произвольный вектор; векторы $U = (U_j)$, $V = (V_j)$ определяются так:

$$U_j = \int_{P^-}^{P^+} \omega_j \tag{12}$$

($\omega_1, \ldots, \omega_g$ — канонический базис голоморфных дифференциалов на R),

$$2V_j = \oint_{b_j} \Omega_{P^+} + \oint_{b_j} \Omega_{P^-}, \tag{13}$$

где Ω_{P^+}, Ω_{P^-} — нормированные дифференциалы второго рода с двойными полюсами в точках P^+, P^- соответственно.

Периодические с периодом N решения цепочки Тода выделяются в нашей схеме так: риманова поверхность R должна иметь вид

$$w^2 = (P_N(z)+1)(P_N(z)-1), \tag{14}$$

где $P_N(z)$ — многочлен. Подчеркнем, что так получаются все периодические решения цепочки Тода.

1. Итак, рассмотрим периодические решения уравнений (1). Ограничение L на пространство собственных функций оператора сдвига на период, т. е. $\psi_{n+N} = w\psi_n$, где ψ_n — l-мерный вектор, является конечномерным линейным оператором. Его матрица имеет вид

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} b_{N-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 & wa_{N-1} \\ a_{N-2} & b_{N-2} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 & b_1 & 1 \\ w^{-1} & 0 & \ldots & 0 & a_0 & b_0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где блочные $l \times l$-элементы равны $b_n = -\dot{g}_n g_n^{-1}$, $a_n = g_n g_{n-1}^{-1}$.

Из представления Лакса следует, что коэффициенты полинома $Q(w, \lambda) = \det(\widetilde{L} - \lambda \cdot 1)$ являются интегралами уравнений (1). Однако, в отличие от абелева случая, они не независимы.

Лемма 1. *Полином* $Q(w, \lambda)$ *имеет вид*

$$(w-\lambda^N)^l + (w^{-1}-\lambda^N)^l + \sum_{k=1}^{l-1} (r_k^+(\lambda)(w-\lambda^N)^k + r_k^-(\lambda)(w^{-1}-\lambda^N)^k) - R_0(\lambda) + \sum a_{ij}\lambda^i w^j. \tag{16}$$

Последнее суммирование ведется по парам i, j *таким, что* $i \geqslant 0$, $i + N\,|\,j\,| \leqslant (N-1)l$. *Полиномы* $r_k^{\pm}$ *имеют лишь* k *отличных от нуля коэффициентов*:

$$r_k^{\pm}(\lambda) = \sum_{i=(N-1)(l-k)-k+1}^{(N-1)(l-k)} b_{ki}^{\pm}\lambda^i.$$

Коэффициенты a_{ij}, $b_{ki}^{\pm}$ *являются полной системой интегралов в инволюции с единственным соотношением*

$$R_0(\lambda) + (-\lambda^N)^l = \sum_k r_k^+(\lambda)(-\lambda^N)^k = \sum_k r_k^-(\lambda)(-\lambda^N)^k. \tag{17}$$

Число независимых интегралов равно $Nl^2 - l^2 + 1$.

Ограничения на вид полинома $Q(w, \lambda)$ эквивалентны следующему условию: все корни w уравнения $Q(w, \lambda) = 0$ при больших λ должны разлагаться в лорановские ряды по λ^{-1}, причем половина должна иметь вид $\lambda^N + O(\lambda^{N-1})$, а вторая половина $\lambda^{-N} + O(\lambda^{-N-1})$.

Рассмотрим алгебраическую кривую $\mathscr{R}$, заданную в C^2 уравнением $Q(w, \lambda) = 0$. В общем положении можно считать, что она неособа и что при почти всех λ уравнение $Q(w, \lambda) = 0$ имеет $2l$ различных корней w_j. Тогда каждой точке P кривой $\mathscr{R}$, т. е. $P = (w_j, \lambda)$, отвечает единственный собственный вектор $\varphi_n(t) = (\varphi_n^1, \ldots, \varphi_n^l)^t$, нормированный условием $\varphi_0^l \equiv 1$. Все остальные координаты $\varphi_n(t)$ являются мероморфными функциями на кривой $\mathscr{R}$. Их полюсы лежат в точках $\gamma_i(t)$, в которых обращается в нуль левый верхний главный минор $\tilde{L} - \lambda \cdot 1$ и в которых ранг $(\tilde{L} - \lambda \cdot 1) = Nl - 1$.

Лемма 2. *Число полюсов $\gamma_i(t)$ равно $Nl^2 - l^2 = g + l - 1$, где g — род кривой $\mathscr{R}$.*

Таким образом, каждому набору начальных данных $g_n(0)$ и $\dot{g}_n g_n^{-1}(0)$ сопоставляется кривая $\mathscr{R}$, т. е. полином Q, и набор $Nl^2 - l^2$ точек $\gamma_i(0)$ на ней. Ядром этого отображения являются решения, отличающиеся преобразованием $g_n \to Gg_n$, где G — постоянная матрица.

Рассмотрим задачу восстановления L по указанным данным.

Пусть Q, как в лемме 1; тогда $\mathscr{R}$ компактифицируется на бесконечности по λ точками $P_j^{\pm}$, в которых w имеет полюсы порядка N и нули кратности N соответственно.

Лемма 3. *Для любого набора $Nl^2 - l^2$ точек γ_i общего положения существует единственная вектор-функция $\psi_n(t, P)$:*

1° *мероморфная на $\mathscr{R}$ вне $P_j^{\pm}$ с полюсами в γ_i;*

2° *если сформировать из $\psi_n(t, \lambda_j^{\pm})$, как из столбцов, матрицы $\psi_n^{\pm}(t, \lambda)$, то они имеют вид*

$$\psi_n^{\pm}(t, \lambda) = \lambda^{\pm n}\left(\sum \xi_{n,s}^{\mp}(t)\,\lambda^{-s}\right)e^{\mp\lambda t/2}, \qquad \xi_{n,0}^{-} = 1. \tag{18}$$

Здесь $\lambda_j^{\pm}$ — прообразы λ в окрестностях $P_j^{\pm}$.

Лемма 4. *Функция $\psi_n(t)$ удовлетворяет уравнениям*

$$L\psi_n = \lambda\psi_n, \quad (\partial_t - P)\psi_n = 0,$$

где $g_n = \xi_{n,0}^{+}$.

Заметим, что функции $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(t)$ отличаются нормировкой $\rho_n(t) = \psi_n(\psi_0^l)^{-1}$.

Следствие. *Матрицы g_n удовлетворяют уравнениям* (1). *В силу ограничений на Q построенные решения периодичны, $g_{n+N} = g_n$.*

Для ψ_n можно построить формулы типа Бейкера — Итса аналогично [15]. Вычисляя по ним $\xi_{n,0}^{\pm}$, получим теорему.

Теорема 1. *Для любого полинома вида* (16) *и любого набора $Nl^2 - l^2$ точек γ_i общего положения функции*

$$g_n(t) = (g_n^{-})^{-1} g_n^{+} c^n \tag{19}$$

являются периодическими решениями уравнения (1), *где матричные элементы матриц $g_n^{\pm}$ равны*

$$g_{n,ij}^{\pm} = \theta(\omega_j^{\pm} + \vec{U}n + \vec{V}t + \vec{Z}_i)\,\theta^{-1}(\omega_j^{\pm} + \vec{Z}_i). \tag{19'}$$

Постоянные векторы $\vec{U}$, $\vec{V}$ задаются периодами дифференциалов третьего и второго родов с полюсами в точках $P_j^{\pm}$; $\omega_j^{\pm}$ — образы точек $P_j^{\pm}$ при преобразовании Абеля, $\vec{Z}_i$ — образы при преобразовании Абеля дивизоров $\gamma_1, \ldots$

$\ldots, \gamma_{g-1}, \gamma_{g+i}, 1 \leqslant i \leqslant l$. *Константа с определяется из условия периодичности* $g_N = g_0$.

Общее решение имеет вид $G_1 g_n G_2$, где G_i — постоянные матрицы.

Замечание. Вычисление всех параметров, входящих в формулы теоремы, по начальным данным $g_n(0)$ и $\dot{g}_n g_n^{-1}(0)$ использует лишь квадратуры и решение алгебраических уравнений, причем последнее необходимо лишь при нахождении $\vec{Z}_i$. Все остальные параметры $\vec{\omega}_j^{\pm}$, U, $\vec{V}$ и т. д. выражаются в квадратурах через интегралы.

2. Рассматривая особые случаи кратных собственных значений операторов L и сдвига на период, ограничимся случаем максимального вырождения кратности l. Тогда полином Q имеет вид $Q(w, \lambda) = Q_1^l(w, \lambda)$, $Q_1 = w + w^{-1} + \sum_{i=0}^{N} a_i \lambda^i$. Каждой точке гиперэллиптической кривой $\mathscr{R}$, заданной уравнением $Q_1(w, \lambda) = 0$, отвечает l-мерное подпространство совместных собственных функций. Пусть $\Psi_n(t, P)$ — матрица, столбцы которой образуют базис в этом подпространстве, нормированный условием $\Psi_0(0, P) = 1$. Тогда Ψ_n — мероморфная матрица, имеющая lN полюсов γ_s, причем

$$\varphi_{n,s}^{ij} = \alpha_s^j \varphi_{n,s}^{il}; \quad \varphi_{n,s}^{ij} = \operatorname{res}_{\gamma_s} \psi_n^{ij}, \tag{20}$$

α_s^j — константы, не зависящие от n и t. В окрестности $P^{\pm}$ прообразов $\lambda = \infty$ Ψ_n имеет вид

$$\Psi_n^{\pm}(t, \lambda) = \lambda^{\pm n} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{n,s}^{\pm}(t) \lambda^{-s} \right) e^{\mp \lambda t/2}. \tag{21}$$

Лемма 5. *Для любого набора данных* (γ_s, α_s^j) (*называемых, как и в* [14], *параметрами Тюрина*) *общего положения существует и единственна матричная функция* Ψ_n, *удовлетворяющая условиям* (20) *и* (21), *нормированная требованием* $\xi_{n,0}^{-} \equiv 1$.

Так же, как и ранее, доказывается, что $\xi_{n,0}^{+}$ является периодическим решением уравнений (1).

3. В заключение приведем конструкцию периодических решений уравнений

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \varphi_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n+1} - \varphi_n}, \tag{22}$$

к которым, как было найдено в [48], приводит двумеризация по Захарову — Шабату пары Лакса для абелевой цепочки Тода. Эти уравнения обобщают, помимо уравнений самой цепочки, и уравнение sin-gordon, соответствующее периодическим решениям $\varphi_{n+2} = \varphi_n$.

Рассмотрим неособую алгебраическую кривую $\mathscr{R}$ рода g с двумя отмеченными точками $P^{\pm}$.

Лемма 6. *Для произвольного набора точек* $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ *общего положения существуют и единственны функции* $\psi_n(z_+, z_-, P)$:

1° *мероморфные вне* $P^{\pm}$ *с полюсами в точках* $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$;

2° *в окрестности* $P^{\pm}$ *они представимы в виде*

$$\psi_n(z_+, z_-, P^{\pm}) = e^{kz_{\pm}} \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{n,s}^{\pm}(z_+, z_-) k^{-s} \right) k^{\pm n};$$

$\xi_{n,0}^{\pm} = 1$, $k^{-1} = k^{-1}(P^{\pm})$ — *локальные параметры в окрестностях* $P^{\pm}$.

Лемма 7. *Имеют место следующие равенства*:

$$\partial_{z_+} \psi_n = \psi_{n+1} + (\partial_{z_+} \varphi_n) \psi_n, \quad \partial_{z_-} \psi_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}} \psi_{n-1}; \quad e^{\varphi_n} = \xi_{n,0}^{-}.$$

Условия совместности этих равенств эквивалентны уравнениям

$$\frac{\partial^2}{\partial z_+ \partial z_-} \varphi_n = e^{\varphi_n - \varphi_{n-1}} - e^{\varphi_{n+1} - \varphi_n},$$

совпадающим с (22), *записанным в конусных переменных.*

Теорема 2. *Для каждой неособой комплексной кривой $\mathcal{R}$ с двумя отмеченными точками формула*

$$\varphi_n = \ln \frac{\theta(\omega^+ + U_1 t + U_2 x + U_3 n + W)}{\theta(\omega^- + U_1 t + U_2 x + U_3 n + W)} + \ln \frac{\theta(\omega^- + W)}{\theta(\omega^+ + W)} + nc \tag{23}$$

задает решения уравнений (22).

Здесь $\omega^\pm = (\omega_1^\pm, \ldots, \omega_g^\pm)$ — образы $P^\pm$ при отображении Абеля; векторы U_i зависят от точек $P^\pm$ и являются векторами периодов абелевых дифференциалов второго и третьего родов с правильно подобранными особенностями в $P^\pm$ (см., аналогично, [15]).

Выделим среди построенных решений периодические $\varphi_{n+N} = \varphi_n$. Для этого необходимо, чтобы на $\mathcal{R}$ существовала функция $E(P)$, имеющая в $P^\pm$ полюс и нуль соответственно N-порядка.

Пусть $\mathcal{R}$ задано в C^2 уравнением

$$w^N - E^m + E\left(\sum a_{ij} E^i w^j\right) = 0; \tag{24}$$

$N(i+1) + mj \leqslant Nm - 2$; N взаимно просто с m. Эта кривая N-листно накрывает E-плоскость, над $E = 0$ и $E = \infty$ все листы склеиваются, т. е. функция $E(P)$, задаваемая проекцией $\mathcal{R}$, обладает нужными свойствами.

Следствие. *Пусть $\mathcal{R}$ вида* (24); *тогда формулы* (23) *дают периодические решения уравнений* (22).

Замечание (Б. А. Дубровин). Методы, развитые в главе 4 настоящего обзора, позволяют, в частности, эффективизировать формулу (23) для решений уравнения (22). Подстановка (23) в (22) дает после простых преобразований следующее соотношение:

$$a \frac{\theta(U_3 + W)\,\theta(U_3 - W)}{\theta^2(W)} = b + \partial_{U(P^+)} \partial_{U(P^-)} \ln \theta(W). \tag{25}$$

Здесь W — произвольный g-мерный вектор; для каждой точки $P \in \mathcal{R}$ $U(P)$ — вектор периодов дифференциала с двойным полюсом в точке P $(2U_{1,2} = U(P^+) \pm U(P^-))$; константы a и b имеют вид

$$a = \varepsilon^{-2}(P^+, P^-), \quad b = \frac{d}{dP} \frac{d}{dQ} \ln \varepsilon(P, Q)\,|_{P=P^+,\, Q=P^-} \tag{25'}$$

(величина $\varepsilon(P, Q)$ определена формулой (5.4.27)). Это — хорошо известное тождество в теории абелевых функций (см. [8], формула (39)). Применяя к (25) теорему сложения, получаем следующую систему (в обозначениях главы 4):

$$a\hat{\theta}[n](2U_3) = b\hat{\theta}[n](0) + \partial_{U(P^+)} \partial_{U(P^-)} \hat{\theta}[n](0), \tag{26}$$

где

$$n \in \frac{1}{2}(\mathbb{Z}_2)^g.$$

Здесь $U_3 = A(P^+) - A(P^-)$, поэтому система (26) вместе с системой (4.2.4) позволяет восстановить по матрице периодов не только канонические уравнения кривой $\mathcal{R}$, но и образ отображения Абеля A: $\mathcal{R} \to J(\mathcal{R})$ (хотя для этого нужно решать трансцендентное относительно U_3 уравнение (26)).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Спрингер. Введение в теорию римановых поверхностей.— М.: ИЛ, 1960.
[2] Н. Г. Чеботарёв. Теория алгебраических функций.— М.: Гостехиздат, 1948.
[3] И. Р. Шафаревич. Основы алгебраической геометрии.— М.: Наука, 1972.
[4] P. Griffiths, J. Harris. Principles of Algebraic Geometry.— Wiley Intersci. Publ., 1978.
[5] J. Igusa. Theta-functions.— Springer, 1972.
[6] A. Krazer. Lehrbuch der Thetafunktionen.— New York, Chelsea, 1970.
[7] H. F. Baker. Abelian functions.— Cambridge, 1897.
[8] J. Fay. Theta-functions on Riemann surfaces.— Lect. notes in math., **352**, Springer, 1973.
[9] Э. И. Зверович. Краевые задачи теории аналитических функций.— УМН, 1971, **26**:1, с. 113—181.
[10] В. В. Голубев. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.— М.: Гостехиздат, 1953.
[11] А. И. Маркушевич. Введение в классическую теорию абелевых функций.— М.: Наука, 1979.
[12] Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. Том 3.— М.: Наука, 1967.
[13] Теория солитонов. Под ред. С. П. Новикова.— М.: Наука, 1980.
[14] И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения.— УМН, 1980, **35**:6, с. 47—68.
[15] И. М. Кривечер. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений.— УМН, 1977, **32**:6, с. 183—208.
[16] И. М. Кривечер. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии.— Функц. анализ, 1977, **11**:2, с. 15—32.
[17] Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков. Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия.— УМН, 1976, **31**:1, с. 55—136.
[18] Н. И. Ахиезер. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов.— ДАН, 1961, **141**:2, с. 263—266.
[19] H. F. Baker. Note on the foregoing paper «Commutative ordinary differential operators» by J. L. Burchnall and T. W. Chaundy. Proc. Royal Soc. London, 1928, A118, p. 584—593.
[20] С. П. Новиков. Периодическая задача Кортевега — де Фриза 1. Функц. анализ, 1974, 8:3, с. 54—66.
[21] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. Уравнение Шрёдингера в магнитном поле и римановы поверхности.— ДАН, 1976, **229**:1, с. 15—18.
[22] И. М. Кричевер. Эллиптические решения уравнения Кадомцева — Петвиашвили и интегрируемые системы частиц на прямой.— Функц. анализ, 1980, **14**:4.
[23] Б. А. Дубровин. О гипотезе С. П. Новикова в теории тэта-функций и нелинейных уравнений типа Кортевега — де Фриза и Кадомцева — Петвиашвили. ДАН, 1980, **251**:3, 541—544.
[24] R. Hirota. Recent developments of direct methods in soliton theory.— Preprint of Hiroshima University, 1979.
[25] А. Н. Тюрин. Геометрия дивизора Пуанкаре многообразия Прима.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1975, **39**, с. 1003—1043.
[26] F. Schottky. Über die Moduln der Thetafunktionen.— Acta Math., 1903, **27**, S. 235—288.
[27] C. Neumann. De probleme quodam mechanico, quod ad priman integralium ultraellipticorum classem revocatum.— J. reine und angew. Math., 1859, **56**, S. 46—63.
[28] J. Moser. Various aspects of integrable hamiltonian systems.— Preprint of Courant Inst., 1978.
[29] А. П. Веселов. Конечнозонные потенциалы и интегрируемые системы на сфере с квадратичным потенциалом.— Функц. анализ, 1980, **14**:1, с. 48—50.

[30] К. Кирхгоф. Механика.— М.: Изд-во АН СССР, 1962.
[31] А. М. Переломов, Несколько замечаний об интегрировании уравнений движения твердого тела в идеальной жидкости.— Функц. анализ, 1981, 15:2.
[32] H. Weber. Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlicher auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flussigkeit. Math. Ann., 1878, 14, p. 173—206.
[33] F. Kötter. Ueber die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. I, II — J. reine und angew. Math., 1892, 109, S. 51—81, 89—111.
[34] В. А. Стеклов. О движении твердого тела в жидкости.— Харьков, 1893.
[35] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. Периодическая задача для уравнений Кортевега — де Фриза и Штурма — Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией.— ДАН, 1974, 219:3, с. 19—22.
[36] С. Ю. Доброхотов, В. П. Маслов. Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ-приближениях.— В сб.: Современные проблемы математики, 1980, 15, с. 3—94.
[37] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. Основные состояния в периодическом поле. Магнитно-блоховские функции и векторные расслоения: ДАН, 1980, 253:6, с. 1293—1297.
[38] A. Andreotti, A. L. Mayer. On period relations for abelian integrals on algebraic curves.— Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Ser. 3. 1967, 21:2, p. 189—238.
[39] H. M. Farkas, H. E. Rauch. Period relations of Schottky type on Riemann surfaces.— Ann. Math., 1970, 92:3, p. 434—461.
[40] R. Garnier. Sur une classe de systemas differentiel abelien deduits theorie des equations lineaires.— Rend. Circ. Matem. Palermo, 1919, 43:4, p. 155—191.
[41] С. В. Манаков. Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела.— Функц. анализ, 1976, 10:4, с. 93—94.
[42] Б. А. Дубровин. Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричными операторами, и абелевы многообразия.— Функц. анализ, 1977, 11:4, с. 28—41.
[43] А. М. Переломов. Когерентные состояния и тэта-функции.— Функц. анализ, 1972, 6:4, с. 47—57.
[44] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
[45] Б. А. Дубровин. Уравнение Кадомцева — Петвиашвили и соотношения между периодами голоморфных дифференциалов на римановой поверхности.— Функц. анализ, 1981.
[46] И. М. Кричевер. Алгебраические кривые и нелинейные разностные уравнения.— УМН, 1976, 33:4, с. 215—216.
[47] D. Mumford, P. van Moerbeke. The spectrum of difference operators and algebraic curves.— Acta Mathem., 1979.
[48] А. В. Михайлов. Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода.— Письма ЖЭТФ, 1974, 30, с. 443—448.
[49] И. В. Чередник. Об условиях вещественности в «конечнозонном интегрировании».— ДАН, 1980, 252:5, с. 1104—1108.
[50] С. Ленг. Введение в алгебраические и абелевы функции.— М.: Мир. 1976.
[51] О. Форстер. Римановы поверхности.— М.: Мир, 1980.
[52] F. Kötter. Die von Steklow und Liapunow entdeckten intergralen Fälle der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit.—Sitzungsber. Königlich Preuslischen Akad. Wiss. Berlin, 1900, 6, S. 79—87.
[53] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. Периодические и условно периодические аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега де Фриза.— ЖЭТФ, 1974, 67:12, 2131—2143.
[54] Б. А. Дубровин. Периодическая задача для уравнения Кортевега де Фриза в классе конечнозонных потенциалов.— Функц. анализ, 1975, 9:3, 41—51.

[55] P. D. Lax. Periodic solutions of Korteweg — de Vries equation — Comm. Pure and Appl. Math., 1975, **28**, 141—188.

[56] H. P. McKean, P. Van Moerbeke. The spectrum of Hill's equation.— Invent Math., 1975, **30**, 217—274.

[57] В. А. Марченко, И. В. Островский. Периодическая задача Кортевега де Фриза.— Матем. сб., 1974, **95**:3, 331—356.

[58] H. P. McKean, E. Trubowitz. Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points.— Comm. Pure Appl. Math., 1967, **29**, 143—226.

[59] И. М. Кричевер. Алгеброгеометрическое построение уравнений Захарова — Шабата и их периодических решений.— ДАН **227**:2, 1976, 291—294.

[60] А. Р. Итс, В. Б. Матвеев. Операторы Хилла с конечным числом лакун и многосолитонные решения уравнения Кортевега—де Фриза.—ТМФ, 1975, **23**:1, с. 51—67.

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
30 сентября 1980 г.