Функциональный анализ и его приложения,
т. 11, вып. 4, 1977, 28—41.

УДК 517.9

ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ, СВЯЗАННЫЕ С МАТРИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ, И АБЕЛЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

Б. А. Дубровин

Настоящая работа посвящена интегрированию периодической задачи для нелинейных систем, связанных с матричными линейными дифференциальными операторами первого порядка, методами, обобщающими методы С. П. Новикова, автора, В. Б. Матвеева и А. Р. Итса (см. обзор [1]). Физически интересными примерами таких систем являются нелинейное уравнение Шрёдингера [2], уравнение взаимодействия волновых пакетов в нелинейных средах [3], модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза (комплексное). С. В. Манаков [4] решил n-мерное обобщение классической задачи Эйлера о движении твердого тела, используя полученные в настоящей работе результаты (прямая проверка независимости полученных в работе [4] интегралов дана А. С. Мищенко и А. Т. Фоменко [5]).

Общий алгоритм построения таких нелинейных систем вместе с методом решения обратной задачи (в быстро убывающем случае) для соответствующих линейных операторов был указан В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [6]. Мы укажем другой алгоритм, более удобный для интегрирования периодической задачи. Основной объект исследования — такие матричные операторы, собственные функции которых мероморфны на римановой поверхности конечного рода. Эти операторы называются конечнозонными, а сама эта поверхность — спектром. Коэффициенты этих операторов удовлетворяют гамильтоновой системе обыкновенных дифференциальных уравнений типа стационарных уравнений Кортевега — де Фриза (КдФ) (уравнений Новикова). Задача интегрирования этой системы решается поэтому одновременно с обратной задачей спектральной теории, т. е. задачей об отыскании всех конечнозонных операторов с заданным спектром. Основной результат таков: совокупность конечнозонных операторов с данным спектром есть (с точностью до факторизации по действию коммутативной группы) якобиево многообразие соответствующей римановой поверхности. Полностью вычислена временная динамика для рассматриваемых нелинейных уравнений в частных производных. Явные формулы для коэффициентов найденных матричных операторов даются через θ-функции.

Формулировки основных результатов настоящей работы опубликованы в [7]; идеи доказательств см. в обзоре [1] (глава 3, § 2). Частный случай двумерных матричных операторов независимо исследован А. Р. Итсом [8] иными методами. И. М. Кричевер [9], [10] указал алгебро-геометрический метод построения нелинейных систем, обобщающих, в частности, системы, рассмотренные в настоящей работе.

Пусть F — пространство гладких комплекснозначных функций $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$, от n переменных $x^1, \ldots, x^n$ таких, что $\sum_i \partial f/\partial x^i = 0$.

Обозначим $\partial f/\partial x^i \equiv f,_i$. Пусть $\mathbf{A}$ — пространство диагональных комплексных матриц порядка n. В пространстве $\mathbf{A}$ фиксируем базис матриц A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $(A_k)^i_j = \delta^i_k\delta^k_j$. Для каждой матрицы $A \in \mathbf{A}$, где $A = (a_i\delta^j_i)$, положим $\partial f/\partial x_A = \sum\limits_i a_i f,_i$. В частности, имеем $f,_i = \partial f/\partial x_{A_i}$.

Пусть для каждой матрицы $A \in \mathbf{A}$ задана матричнозначная функция $U_A(\mathbf{x}) = (u^j_{A_i})$, $i, j = 1, \ldots, n$, где все матричные элементы суть функции из F. Рассмотрим семейство операторов L_A на пространстве вектор-функций F^n, зависящих от параметра E,

$$L_A = \frac{\partial}{\partial x_A} + U_A - EA \equiv \frac{\partial}{\partial x_A} + Q_A, \qquad A \in \mathbf{A}. \tag{1}$$

Потребуем, чтобы операторы построенного семейства образовывали коммутативную алгебру $\mathbf{L}$ при любом E, т. е. если $A, B \in \mathbf{A}$, то

$$[L_A, L_B] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial Q_B}{\partial x_A} - \frac{\partial Q_A}{\partial x_B} = [Q_A, Q_B]. \tag{2}$$

Приравнивая в равенстве (2) коэффициенты при E, получаем соотношение $[A, U_B] = [B, U_A]$, откуда имеем

$$U_A = [A, V], \qquad A \in \mathbf{A}, \tag{3}$$

где $V = (v^j_i)$ — некоторая матрица, причем для определенности будем считать, что диагональные элементы V нулевые. Приравнивая теперь в равенстве (2) свободные члены, получаем систему из $n - 2$ нелинейных уравнений в частных производных на матрицу V

$$\left[A, \frac{\partial V}{\partial x_B}\right] - \left[B, \frac{\partial V}{\partial x_A}\right] = [[A, V], [B, V]], \qquad A, B \in \mathbf{A}. \tag{4}$$

Систему (4) можно переписать в другом, удобном для вычислений виде,

$$v^j_{i,p} = v^j_p v^p_i, \text{ если } p \neq i, j, \qquad v^j_{i,i} + v^j_{i,j} = -\sum_s v^j_s v^s_i. \tag{4'}$$

Если V есть решение системы (4), то ее матричные элементы, а также любые выражения, зависящие только от V, можно рассматривать или как функции из F, или как функции одного переменного $x = x_A$, где матрица $A \in \mathbf{A}$ фиксирована. Мы будем переходить от одного способа записи к другому без особых оговорок.

Построим теперь набор коммутирующих динамических систем на многообразии матриц V, являющихся решениями системы (4). Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_A} = [\lambda, Q_A], \qquad Q_A = U_A - EA \equiv [A, V] - EA. \tag{5}$$

Лемма 1. *Уравнение* (5) *имеет единственное решение* $\lambda = \lambda_B$, $B \in \mathbf{A}$, *в виде формального ряда по степеням* $1/E$, *такое, что*

$$\lambda_B = B + (\lambda_{1,B}/E) + (\lambda_{2,B}/E^2) + \ldots; \tag{6}$$

если $V = 0$, *то*

$$\lambda_B \equiv B. \tag{7}$$

Матричные элементы матриц $\lambda_{i,B}$ полиномиально выражаются через матричные элементы матриц V; $V,_j$, $\ldots$, $V,_{j_1\ldots j_{i-1}}$ с постоянными коэффициентами, зависящими от B.

Определение 1. *N-м уравнением типа КдФ* называется уравнение

$$[A, \dot{V} - \lambda_{N+1,\,B}] = 0, \quad A, B \in \mathbf{A}, \quad V = V(\mathbf{x}, t), \tag{8}$$

или произвольная сумма этих уравнений

$$\sum_{k\leqslant N} [A, \dot{V} - \lambda_{k+1,\,B_k}] = 0, \quad B_k \in \mathbf{A}. \tag{8$'$}$$

Уравнение (8) (или (8′)) определяет динамическую систему на многообразии матриц V, являющихся решениями системы (4). Уравнение (8) допускает коммутационное представление типа Лакса или Новикова. Рассмотрим матрицу $\Lambda = \Lambda_{N,\,B}(\mathbf{x}, E)$ вида

$$\Lambda = BE^N + \lambda_{1,\,B}\, E^{N-1} + \ldots + \lambda_{N,\,B}. \tag{9}$$

Лемма 2. *Уравнение* (8) *эквивалентно соотношению коммутации*

$$\left[L_A, \frac{\partial}{\partial t} + \Lambda\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\Lambda}{\partial x_A} - \frac{\partial Q_A}{\partial t} = [\Lambda, Q_A]. \tag{10}$$

Доказательство сразу следует из соотношений (7).

Представление (10) и есть коммутационное представление уравнения (8) на матрицах n-го порядка, полиномиально зависящих от параметра E (представление Новикова; по поводу эквивалентности представления Лакса и представления Новикова см. [1], глава 2). Для уравнения (8′) в качестве матрицы Λ нужно взять сумму матриц вида (9).

Лемма 3. *Динамические системы* (8) *при разных* B, N *коммутируют между собой.*

Доказательство. Достаточно доказать, что коммутируют между собой операторы вида $\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda$, т. е. если $\Lambda_1 = \Lambda_{N_1,\,B_1}$, $\Lambda_2 = \Lambda_{N_2,\,B_2}$ и t_1, t_2 — соответствующие времена, то имеет место соотношение

$$\frac{\partial\Lambda_1}{\partial t_2} - \frac{\partial\Lambda_2}{\partial t_1} = [\Lambda_1, \Lambda_2]. \tag{11}$$

Для этого достаточно показать, что если Λ имеет вид (9) и V есть решение уравнения (8), то $\lambda = \lambda_A$, $A \in \mathbf{A}$, является решением такого уравнения:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = [\lambda, \Lambda]. \tag{12}$$

Это следует из соотношений (5) и явного вида уравнения (8). В частности, если $B = A_i$, где $(A_i)_l^k = \delta_i^k \cdot \delta_l^i$, и $N = 2$, то получаем систему, являющуюся аналогом нелинейного уравнения Шрёдингера. В дальнейшем будет полезна явная формула

$$\dot{v}_j^i \equiv \partial v_j^i / \partial t_i = v_{j,ii}^i - (v_j^i v_i^j)\, v_j^i. \tag{12$'$}$$

Определение 2. Потенциал V называется *конечнозонным* для оператора L_A, если L_A обладает при всех E собственной вектор-функцией ψ, $L_A\psi = 0$, мероморфной на римановой поверхности Γ конечного рода, n-листно накрывающей E-плоскость. Поверхность Γ называется *спектром* оператора L_A.

Ниже будет показано, что конечнозонные операторы, получающиеся в рамках нашей конструкции, таковы, что их коэффициенты периодичны (или условно периодичны) и соответствующие собственные функции блоховские, т. е. при сдвиге на период умножаются на скаляр (см. [1]).

Наша цель — отыскать стационарные (т. е. не зависящие от времени t) решения уравнения вида (8) (или (8′))

$$[A, \lambda_{N+1, B}] = 0, \quad B \in \mathbf{A}, \tag{13}$$

$$[A, \sum_{k \leqslant N} \lambda_{k+1, B_k}] = 0, \quad B_k \in \mathbf{A}, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{13′}$$

Уравнения (13), (13′) представляют собой системы уравнений в частных производных, которые, используя уравнения (4), можно переписать как системы $n\,(n-1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений порядка N каждое. Для интегрирования системы (13) используем вытекающее из (10) ее представление типа Лакса на матрицах, полиномиально зависящих от E,

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_A} = [\Lambda, Q_A], \tag{14}$$

где матрица Λ определена формулой (9), причем соотношение (14) справедливо для любой матрицы $A \in \mathbf{A}$.

Лемма 4. *Если V есть решение системы* (13) (*или* (13′)), *то оператор L_A — конечнозонный для любой $A \in \mathbf{A}$.*

Доказательство. Рассмотрим риманову поверхность Γ алгебраической функции $w = w\,(E)$, задаваемой уравнением

$$R\,(w, E) = \det |\, w \cdot 1 - \Lambda \,| = 0. \tag{15}$$

Из уравнения (14) вытекает, что матрица Λ при изменении x_A остается подобной сама себе, следовательно, ее характеристический многочлен $R\,(w, E)$ от x_A не зависит. Построим собственную функцию ψ оператора L_A, потребовав, чтобы она была собственным вектором для матрицы Λ. Такая функция существует, поскольку оператор L_A и оператор умножения на матрицу Λ коммутируют в силу соотношения (14). Тогда (при подходящей нормировке) ее координаты рационально выражаются через матричные элементы матрицы $w \cdot 1 - \Lambda$, т. е. являются алгебраическими функциями на римановой поверхности Γ, задаваемой уравнением (15). Значит, ψ продолжается до мероморфной функции на римановой поверхности $\Gamma \setminus \infty$. Функция ψ будет собственной для всех операторов из коммутативной алгебры L.

Поверхность Γ n-листно накрывает E-плоскость. Вычислим ее род, считая для простоты, что B — матрица общего положения, т. е. что ее диагональные элементы попарно различны: $B = (b_i \delta_i^j)$, $b_i \neq b_j$. Тогда i-й корень характеристического многочлена $R\,(w, E)$ имеет при больших n асимптотику вида

$$w_i\,(E) = b_i E^N \left(1 + O\left(\frac{1}{E}\right)\right). \tag{16}$$

Отсюда, между прочим, вытекает, что при $E \to \infty$ поверхность Γ имеет n упорядоченных точек; обозначим их через $\{1\}, \ldots, \{n\}$. Дискриминант многочлена $R\,(w, E)$ имеет вид $\Delta = \prod_{i \neq j} (w_i - w_j) = \delta \cdot E^{Nn(n-1)} +$ младшие члены, где $\delta = \prod_{i \neq j} (b_i - b_j)$. Значит, поверхность Γ имеет $Nn\,(n-1)$ точек ветвления, отсюда получаем ее род p,

$$p = N\,\frac{n\,(n-1)}{2} - (n-1). \tag{17}$$

Пусть

$$R\,(w, E) = \sum_{i, j} r_{ij} w^i E^j. \tag{18}$$

Тогда из определения матрицы Λ следует, что коэффициенты r_{ij} являются полиномами от матричных элементов матриц $V, V', \ldots, V^{(N-1)}$. В силу леммы 4 эти полиномы являются интегралами системы (13). Среди этих интегралов есть «тривиальные». Пусть π — группа всех диагональных невырожденных матриц n-го порядка. Группа π действует на матрицах V так:

$$V \mapsto \varepsilon V \varepsilon^{-1}, \qquad \varepsilon \in \pi. \tag{19}$$

Из определения системы (4) вытекает, что группа π корректно действует на решениях этой системы. Далее, из единственности коэффициентов $\lambda_{i,B}$, определяемых формулами (6), (6′), следует, что эти коэффициенты преобразуются по такому закону:

$$\lambda_{i,B} \to \varepsilon \lambda_{i,B} \varepsilon^{-1}. \tag{20}$$

Поэтому π является группой симметрий системы (13) (или (13′)). Это дает $n-1$ интеграл этой системы. Ниже мы покажем, что система (13) гамильтонова. Если проверить, что интегралы $r_{ij}(V, V', \ldots)$ этой системы независимы и находятся в инволюции, то отсюда будет вытекать полная интегрируемость этой системы. Вместо этого мы явно опишем структуру инвариантных многообразий этой системы. Для каждой римановой поверхности Γ вида (15)

$$\sum r^0_{ij} w^i E^j = 0$$

рассмотрим инвариантное многообразие M_Γ, задаваемое пересечением уровней интегралов $r_{ij}(V, V', \ldots)$,

$$M_\Gamma = \{V \mid r_{ij}(V, V', \ldots) = r^0_{ij}\}. \tag{21}$$

Опишем многообразие M_Γ при любом Γ. В силу леммы 4 точка на многообразии M_Γ — это конечнозонный оператор L_A (для произвольной матрицы $A \in \mathbf{A}$) со спектром Γ. Поэтому задача об описании многообразия M_Γ эквивалентна задаче об отыскании всех конечнозонных операторов L_A с данным спектром Γ.

Т е о р е м а. $M_\Gamma/\pi = J(\Gamma)$. *Здесь* M_Γ/π — *фактор-пространство по действию группы* π, $J(\Gamma)$ — *многообразие Якоби римановой поверхности* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Исследуем аналитические свойства построенной собственной вектор-функции ψ. Построим матричнозначную функцию $\Psi(x, y, P)$, где P — точка поверхности Γ, x (и y) — это переменная x_A, где матрица $A \in \mathbf{A}$ считается фиксированной (см. замечание после формул (4′)). Пусть E отлично от точки ветвления, т. е. для данного E у пары операторов $L_A = L$, Λ есть ровно n линейно независимых собственных функций $\psi_1(x, E), \ldots, \psi_n(x, E)$. Выстроим их координаты в матрицу $\psi^j_i(x, E)$. Пусть $\varphi^j_i(x, E)$ — обратная матрица; она существует, так как функции $\psi_1, \ldots, \psi_n$ линейно независимы. Тогда, если $P \in \Gamma$, $P = (E, k)$, k — номер листа, то положим

$$\Psi^j_i(x, y, P) = \psi^j_k(x, E) \cdot \varphi^k_i(y, E). \tag{22}$$

Это определение не зависит от первоначального упорядочения собственных функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$, а также от их нормировки. Функция $\Psi^j_i(x, y, P)$, таким образом, является однозначной функцией на римановой поверхности Γ. Отметим, что если

$$G(x, y, E) = \begin{cases} \operatorname{Tr}_P \Psi(x, y, P), & x \leqslant y \\ 0, & x > y, \end{cases}$$

то функция $G(x, y, E)$ есть матрица Грина оператора L_A. Положим $\Psi(x, x, P) = g(x, P)$.

Лемма 5. *Функция $g(x, P)$ обладает следующими свойствами:*

a) *$g(x, P)$ дает спектральное разложение для матрицы $\Lambda(x, E)$, т. е. $g^2 = g$, $g(x, (E, k)) \cdot g(x, (E, l)) = 0$ при $k \neq l$ (k, l — номера листов), $\mathrm{Tr}_P\, g(x, P) = 1$, $\mathrm{Tr}_P\, w(P) g(x, P) = \Lambda(x, E)$.*

b) *Матричные элементы матрицы $g(x, P)$ являются алгебраическими функциями на поверхности Γ, причем их полюсы расположены в точности в точках ветвления Γ.*

c) *Группа периодов функции $g(x, P)$ совпадает с группой периодов потенциала $V(x)$.*

d) *$g(x, P)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial g}{\partial x_B} = [g, Q_B], \qquad B \in \mathbf{A}. \tag{23}$$

e) *$g(x, P)$ при $P \to \{k\}$ имеет разложение вида*

$$g(x, P) = g_0^{(k)} + \frac{g_1^{(k)}}{E} + \frac{g_2^{(k)}}{E^2} + \ldots, \tag{24}$$

причем

$$g_0^{(k)} = A_k, \quad g_1^{(k)} = -[A_k, V], \quad g_2^{(k)} = V_{,k} - \sum_{i \neq k} v_k^i v_i^k A_i + \left(\sum_s v_s^k v_k^s\right) A_k. \tag{25}$$

Доказательство. Так как ψ является собственным вектором матрицы Λ, то формула (22) при $x = y$ превращается в выражение для проекторов матрицы Λ, известное из линейной алгебры. Отсюда легко следует явная формула, выражающая матрицу g через матрицу Λ: если $R(w, E) = w^n + I_1(E) w^{n-1} + \ldots + I_n$, то

$$g(x, P) = \frac{w^{n-1} + a_1 w^{n-2} + \ldots + a_{n-1}}{\partial R(w, E)/\partial w}, \tag{26}$$

где $a_k = I_k + I_{k-1}\Lambda + \ldots + \Lambda^k$, $k = 1, \ldots, n-1$. Из этой формулы вытекает утверждение п. b), так как знаменатель $\partial R(w, E)/\partial w$ имеет нули в точках ветвления поверхности Γ. Пункт c) также вытекает из формулы (26). Уравнение (23) следует из формулы (22) и из того, что матрица φ, входящая в формулу (22), удовлетворяет уравнению $\partial\varphi/\partial x_A = -\varphi Q_A$. Разложение (24) и формулы (25) получаются рекуррентно из уравнения (23) аналогично разложениям (6). Более точно,

$$g_i^{(k)} = \lambda_{i, A_k}. \tag{27}$$

Эти разложения сходятся в силу п. b).

Другое доказательство существования разложений (24) можно получить общими методами получения асимптотических разложений для резольвент, указанными в обзоре И. М. Гельфанда и Л. А. Дикого [11].

Следствие. *Функции $g_i^j(x, P)$ в бесконечно удаленной части поверхности Γ имеют только нули, причем их расположение таково: $g_i^j(x, P)$ при $i \neq j$ имеет двойной нуль в точках $P = \{k\}$, $k \neq i, j$, и простой нуль при $k = i$ или $k = j$; $g_i^i(x, P)$ имеет двойной нуль при $P = \{k\}$, $k \neq \{i\}$, и $g_i^i(x, \{i\}) \equiv 1$.*

Доказательство следствия немедленно получается из формул (25).

Лемма 6. *Функции $\Psi_i^j(x, y, P)$ обладают на римановой поверхности Γ следующими свойствами:*

a) *$\Psi_i^j(x, y, P)$ мероморфна на $\Gamma \setminus \infty$, ее полюса лежат в точках ветвления Γ.*

b) *Дивизор нулей* $\Psi_i^j(x, y, P)$ *распадается в сумму двух дивизоров* $d_i(y) + d^j(x)$.

c) *При* $P \to \{k\}$ $\Psi_i^j(x, y, P)$ *имеет асимптотику вида* $\Psi_i^j(x, y, P) \sim \sim \theta_{ik}^j(x, y, P) \cdot \exp\{(x - y)a_k E\}$, *где* θ_{ik}^j *мероморфна в окрестности точки* $P = \{k\}$.

Доказательство. Пусть $c(x, y, E) = (c_i^j(x, y, E))$ — матричное решение уравнения $L_A c = 0$, с начальным условием $c(y, y, E) = 1$ (y — фиксированный параметр). Матричные элементы $c_i^j(x, y, E)$ являются целыми функциями по E. Из соображений единственности решения имеем формулу

$$\Psi(x, y, P) = c(x, y, E(P))\, g(y, P). \tag{28}$$

Из формулы (28) и п. b) леммы 5 вытекает п. a) леммы 6. Матрица $\Psi(x, y, P)$ имеет ранг 1; ее столбцы суть собственные функции оператора L_A, действующего по переменной x, отличающиеся лишь нормировкой, а строки — собственные функции сопряженного оператора L_A^*, действующего по y, где сопряженный оператор L_A^* определяется так (+ означает транспонирование):

$$L_A^* = \frac{\partial}{\partial y} - Q_A^+. \tag{29}$$

Поэтому

$$\frac{\Psi_i^k(x, y, P)}{\Psi_j^k(x, y, P)} = \frac{g_i^k(y, P)}{g_j^k(y, P)}, \quad \frac{\Psi_i^k(x, y, P)}{\Psi_j^k(x, y, P)} = \frac{g_i^k(y, P)}{g_j^k(y, P)} \quad \text{не зависит от } k. \tag{30}$$

Из (30) вытекает п. b) леммы. Докажем п. c). Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \Psi_i^j(x, y, P) = \sum_s (a_j E \delta_s^j - (a_j - a_s) v_s^j(x)) \frac{g_i^s(x, P)}{g_i^j(x, P)}. \tag{31}$$

Введем обозначение

$$\chi^j(x, P) = a_j E - \sum_s (a_j - a_s) v_s^j(x) \frac{g_i^s(x, P)}{g_i^j(x, P)} \tag{32}$$

(от i не зависит). Интегрируя равенство (31) и учитывая начальное условие $\Psi_i^j(y, y, P) = g_i^j(y, P)$, имеем:

$$\Psi_i^j(x, y, P) = g_i^j(y, P) \exp\left\{\int_y^x \chi^j(\xi, P)\, d\xi\right\}. \tag{33}$$

Из разложений (25) следует, что функция $\chi^j(x, P)$ при $P \to \{k\}$ имеет асимптотику вида

$$\chi^j(x, P) = a_k E + O(1). \tag{34}$$

Пункт c) леммы 6 вытекает из соотношений (34) и (33).

Следствие. *Если V периодична по x с периодом T, то построенная собственная функция ψ является блоховской, т. е.*

$$\psi(x + T, P) = \exp[p(P)] \cdot \psi(x, P), \tag{35}$$

где

$$p(P) = \int_y^{y+T} \chi^j(\xi, P)\, d\xi. \tag{36}$$

Доказательство. Из формулы (32) и из п. c) леммы 5 следует, что периоды χ^j и периоды V одинаковы. Покажем, что функция $p(P)$

не зависит от j. Это очевидно из соотношения (30), так как правая часть при сдвиге на период не меняется.

Замечание. Аналогично формуле (33), рассматривая зависимость от y, легко получить формулу

$$\Psi_i^j(x, y, P) = g_i^j(x, P)\exp\left\{\int_x^y \chi_i(\xi, P)\, d\xi\right\}, \qquad (37)$$

где

$$\chi_i(\xi, P) = -a_i E + \sum_s \frac{g_s^j(\xi, P)}{g_i^j(\xi, P)}(a_s - a_i)\, v_i^s(\xi). \qquad (38)$$

Приравнивая правые стороны формул (33) и (37) и беря от полученного тождества логарифмическую производную по x, получаем полезное тождество

$$\frac{\partial}{\partial x}\ln g_i^j(x, P) = \chi_i(x, P) + \chi^j(x, P). \qquad (39)$$

Лемма 7. *Вариационная производная функционала* $p\,\{V\}$, *определенного формулой* (36), *имеет вид*

$$\frac{\delta p(P)}{\delta V(x)} = [A, g(x, P)]. \qquad (40)$$

Доказательство. Пусть матрица A имеет нулевой след. Рассмотрим два потенциала: V и $\tilde V = V + \delta V$, где у матрицы δV отличен от нуля только элемент $(\delta V)_j^i$. Возьмем произвольное значение E, отличное от точки ветвления; пусть $(E, 1), \ldots, (E, n)$ — упорядоченные прообразы точки E на Г. Пусть $\tilde\psi_1 = \tilde\psi\,(x, (E, 1))$ — блоховская функция для потенциала $\tilde V$, $\psi_2 = \psi\,(x, (E, 2)), \ldots, \psi_n = \psi\,(x, (E, n))$ — блоховские функции для потенциала V. Рассмотрим матрицу, первый столбец которой есть вектор $\tilde\psi_1 = (\tilde\psi_1^j)$, а остальные — векторы $\psi_2, \ldots, \psi_n$. Обозначим через $D(x)$ определитель этой матрицы. Имеем очевидное тождество

$$\frac{d}{dx} D(x) = (a_j - a_i)\,\delta v_j^i(x)\,\tilde\psi_1^j\,\eta_1^i(x), \qquad (41)$$

где η_1^i — алгебраическое дополнение элемента $\tilde\psi_1^i$. Пусть $\tilde p_1 = \tilde p\,(E, 1)$ для потенциала $\tilde V$ и $p_i = p\,(E, i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ для потенциала V. Из условия $\mathrm{Sp}\, A = 0$ вытекает условие $\Sigma p_i = 0$ (унимодулярность матрицы трансляции). Интегрируя равенство (41) по периоду, имеем:

$$(e^{\tilde p_1 + p_2 + \ldots + p_n} - 1)\, D(x) = \int_x^{x+T} (a_j - a_i)\,\psi_1^j(\xi)\,\eta_1^i(\xi)\,\delta v_j^i(\xi)\, d\xi. \qquad (42)$$

В первом порядке по δv_j^i отсюда имеем:

$$\delta p_1 = \int_x^{x+T} (a_j - a_i)\,\psi_1^j(\xi)\,\varphi_i^1(\xi)\,\delta v_j^i(\xi)\, d\xi. \qquad (43)$$

Формула (43) в силу определения (22) и означает равенство (40) на первом листе поверхности Г.

Следствие 1. *Уравнение* (8) *гамильтоново.*

Доказательство. Возьмем в уравнении (8) $B = A_k$, где A_k — базисная матрица, $(A_k)_j^i = \delta_k^i \cdot \delta_j^k$. Построим гамильтониан для этого уравнения. Функция $\chi^j(x, P)$ при $P \to \{k\}$ имеет разложение вида

$$\chi^j(x, P) = a_k E + Q_0^{(k)} + \frac{Q_1^{(k)}}{E} + \ldots, \tag{44}$$

где коэффициенты $Q_0^{(k)}$, $Q_1^{(k)}$ являются полиномами от V, V', ... и находятся из формулы (32), учитывая (24) (при разных j многочлены $Q_i^{(k)}$ отличаются на полную производную, поэтому индекс j мы не пишем). Определим функционал $I_{k,N}\{V\}$, полагая

$$I_{k,N}\{V\} = \int\limits_T Q_{N+1}^{(k)}\, dx. \tag{45}$$

Из формул (40) и (36) тогда вытекает, что

$$\frac{\delta I_{k,N}\{V\}}{\delta V(x)} = [A, g_{N+1}^{(k)}], \tag{46}$$

где $g_{N+1}^{(k)}$ определен равенством (24). В силу равенства (27) получаем, что уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$\dot V = (\mathrm{ad}\, A)^{-1} \frac{\delta I_{k,N}}{\delta V}, \tag{47}$$

что и означает гамильтоновость в силу косой симметрии оператора ad A.

Следствие 2. *Уравнение* (13) (*или* (13′)) *гамильтоново.*

Доказательство. Эти уравнения в силу (47) суть уравнения экстремалей для некоторого функционала $I\{V\}$, являющегося линейной комбинацией функционалов $I_{k,N}\{V\}$, поэтому они гамильтоновы.

Вернемся к изучению аналитических свойств собственных функций. Пусть $\mathfrak{A}$ — отображение Абеля k-й симметрической степени $S^k\Gamma$ поверхности Γ в ее якобиан $J(\Gamma)$:

$$\mathfrak{A}: S^k\,\Gamma \to J(\Gamma), \quad k = 1, 2, \ldots \tag{48}$$

Отображение $\mathfrak{A}$ строится так. Пусть α_i, β_j (i, $j = 1, \ldots, p$) — канонический базис циклов на римановой поверхности Γ (рода p), имеющих индексы пересечения вида $\alpha_i \circ \alpha_j = \beta_i \circ \beta_j = 0$, $\alpha_i \circ \beta_j = \delta_{ij}$; $\omega_1, \ldots, \omega_p$ — базис дифференциалов первого рода на Γ, нормированных условиями $\oint\limits_{\alpha_k} \omega_l = 2\pi i \delta_{kl}$. Пусть $B_{kl} = \oint\limits_{\beta_k} \omega_l$ — матрица периодов, $P_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка. Отображение Абеля строится так:

$$[\mathfrak{A}(P_1, \ldots, P_k)]_l = \sum_{s=1}^{k} \int\limits_{P}^{P_s} \omega_l. \tag{48′}$$

$\mathfrak{A}$ — бирациональный изоморфизм при k, равном роду p поверхности Γ. Пусть D_w — дивизор ветвления на Γ, Σ — «дивизор бесконечности», $\Sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} \{i\}$.

Лемма 8. а) *Степени дивизоров* d_i *и* d^j ($i, j = 1, \ldots, n$) *равны роду* p *поверхности* Γ.

b) *На многообразии Якоби* $J(\Gamma)$ *имеет место соотношение*

$$\mathfrak{A}(d_i(x)) + \mathfrak{A}(d^j(x)) = \mathfrak{A}(D_w) - \mathfrak{A}(2\Sigma - \{i\} - \{j\}). \tag{49}$$

Доказательство. Равенство степеней дивизоров $d_i(x)$ и $d^j(y)$ очевидно в силу равноправия операторов L_A и L_A^*. В силу леммы 6 и леммы 5, а также следствия из последней, дивизор функции $g_i^j(x, P)$ имеет вид

$$d_i(x) + d^j(x) + 2\Sigma - \{i\} - \{j\} - D_w. \tag{50}$$

Степень дивизора полюсов D_w равна $Nn(n-1)$ (см. выше), степень дивизора $2\Sigma - \{i\} - \{j\}$ равна $2(n-1)$. Из алгебраичности функции $g_i^j(x, P)$ на поверхности Γ вытекает, что степень дивизора $d_i(x) + d^j(x)$ равна $Nn(n-1) - 2(n-1)$, что и доказывает, ввиду формулы (17), пункт a) леммы. Пункт b) следует из формулы (50) и классической теоремы Абеля.

Пусть на многообразии Якоби $J(\Gamma)$ с координатами $\eta_1, \ldots, \eta_p$

$$\eta(x) = \mathfrak{A}(d^j(x)). \tag{51}$$

Л е м м а 9. *$\eta(x)$ есть прямолинейная обмотка тора $J(\Gamma)$, т. е.*

$$\eta(x) = \eta(y) + (x-y)\mathbf{Z}, \tag{52}$$

где $\mathbf{Z}$ — постоянный вектор.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\widetilde{\Psi}^j(x, y, P)$, определенную равенством

$$\widetilde{\Psi}^j(x, y, P) = \frac{\Psi_i^j(x, y, P)}{g_i^j(y, P)} \tag{53}$$

(от i не зависит). Согласно (33) имеем:

$$\widetilde{\Psi}^j(x, y, P) = \exp\int_y^x \chi^j(\xi, P)\, d\xi. \tag{54}$$

Из формул (25) и (32) следует, что если $P \to \{j\}$, то $\chi^j(\xi, P) = a_jE + O(1/E)$. Поэтому при $P \to \{j\}$ имеем:

$$\widetilde{\Psi}^j(x, y, P) \sim \exp[a_jE(x-y)]\left(1 + O\left(\frac{1}{E}\right)\right), \tag{55}$$

и при $P \to \{k\}$, $k \neq j$,

$$\widetilde{\Psi}^j(x, y, P) \sim \frac{v_k^j(x)}{v_k^j(y)} \exp[a_kE(x-y)]\left(1 + O\left(\frac{1}{E}\right)\right). \tag{56}$$

Кроме того, из формулы (53) и леммы 6 дивизор функции $\widetilde{\Psi}^j(x, y, P)$ имеет вид $d^j(x) - d^j(y)$. Из рассуждений типа леммы Ахиезера (см. [12], [1], глава 2, § 3) следует, что нули $d^j(x)$ функции $\widetilde{\Psi}^j(x, y, P)$ определяются по полюсам $d^j(y)$ из уравнения (52), где вектор $\mathbf{Z}$ определяется так. Пусть Ω_k — абелев дифференциал (второго рода) на поверхности Γ, имеющий единственный двойной полюс при $P = \{k\}$, такой, что при $P \to \{k\}$

$$\Omega_k = -(dz/z^2) + O(z), \tag{57}$$

нормированный условиями

$$\oint_{\alpha_j} \Omega_k, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{58}$$

Пусть вектор $\mathbf{Z}_k$ имеет координаты Z_k^j, где

$$Z_k^j = \oint_{\beta_j} \Omega_k. \tag{59}$$

Тогда вектор $\mathbf{Z}$ имеет координаты $Z^j = \sum_{k=1}^n a_k Z_k^j$.

Следствие. *Конфигурация дивизоров* $d_i(x)$, $d^j(x)$ *при любом* x *определяется с точностью до линейной эквивалентности заданием одного из них (например,* d^1*) при* $x = x_0$.

Вернемся к доказательству теоремы. Поставим в соответствие решению $V(x)$ уравнения (13) (или (13′)) точку η на многообразии Якоби $J(\Gamma)$, беря

$$\eta = \mathfrak{A}(d^1(x_0)). \tag{60}$$

По следствию из леммы 9 мы можем восстановить всю конфигурацию $\mathfrak{A}(d_i(x))$, $\mathfrak{A}(d^j(x))$ при любом x, т. е. можем найти положение нулей функций $\Psi_i^j(x, y, P)$ при любых x, y, i, j. Из леммы 9 следует (см. формулы (55), (56) и ниже), что функции $\widetilde{\Psi}^j$ определяются однозначно заданием η. Функции $\Psi_i^j(x, y, P)$, а значит, и $g_i^j(x, P)$ можно по этим данным восстановить с точностью до множителя, не зависящего от P, т. е. по заданию η можно построить функцию $\hat{g}_i^j(x, P)$, такую, что

$$\hat{g}_i^j(x, P) = \varepsilon_i^j(x)\, g_i^j(x, P). \tag{61}$$

Матрица $\hat{g}_i^j(x, P)$ должна удовлетворять условиям леммы 5. Из соотношения $\hat{g}^2 = \hat{g}$ получаем, что $\varepsilon_i^j = \varepsilon_j/\varepsilon_i$. Так как $\hat{g}$ должна удовлетворять уравнению вида (23), то ε_i не зависят от x, т. е. $\hat{g} = \varepsilon g \varepsilon^{-1}$, где $\varepsilon = (\varepsilon_i \delta_i^j) \in \pi$. Покажем, что так же отличаются и соответствующие потенциалы V. Действительно, это следует из формул (25), так как матричные элементы V суть главные члены разложения g_i^j в бесконечности. Таким образом, по заданию точки на $J(\Gamma)$ потенциал V восстанавливается с точностью до действия группы π, т. е. отображение $M_\Gamma/\pi \to J(\Gamma)$ инъективно. Для доказательства сюръективности можно воспользоваться явными формулами для потенциала, полученными ниже. Проще использовать соображения размерности: уравнение (13) есть гамильтонова система с $N\frac{n(n-1)}{2}$ степенями свободы. Интегралы r_{ij} (формула (18)) независимы, так как $\dim M_\Gamma \leqslant N\frac{n(n-1)}{2}$ из уже доказанной инъективности. Значит, $\dim M_\Gamma = N\frac{n(n-1)}{2}$ и $\dim M_\Gamma/\pi = N\frac{n(n-1)}{2} - (n-1) =$ роду поверхности $\Gamma = \dim J(\Gamma)$.

Многообразие M_Γ инвариантно для динамических систем вида (8) в силу коммутативности (лемма 3). Вычислим траектории этих систем на $M_\Gamma/\pi = J(\Gamma)$ (напомним, что динамические системы вида (8) коммутируют с действием группы π).

Лемма 10. *Траектории динамической системы* (8) *на торе* $J(\Gamma)$ *суть прямолинейные обмотки, т. е.*

$$\eta(\tau) = \eta(\sigma) + (\tau - \sigma)W, \tag{62}$$

W — *постоянный вектор.*

Доказательство. Рассмотрим для динамической системы вида (8) соответствующий оператор

$$M = \frac{\partial}{\partial \tau} + \hat{\Lambda}, \quad \hat{\Lambda} = \Lambda_{\hat{N}, \hat{B}}. \tag{63}$$

Из условия коммутации (11) имеем:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \tau} = [\Lambda, \hat{\Lambda}], \quad \text{т. е.} \quad [M, \Lambda] = 0. \tag{64}$$

Аналогично имеем

$$[M, L_A] = 0. \tag{65}$$

В силу соотношений (64), (65) оператор M — конечнозонный с тем же спектром Г; его собственная функция имеет вид $\Psi_i^j(\tau, \sigma, x, y, P)$. Пусть $x = y$ (в дальнейшем зависимость от $x = y$ мы будем опускать). При $\tau = \sigma$ получаем функцию $g = g(\tau, P)$. Утверждения леммы 5, леммы 6 (кроме пункта c)) и леммы 8 для функций $\Psi(\tau, \sigma, P)$ и $g(\tau, P)$ справедливы автоматически. Исследуем асимптотику функций $\Psi_i^j(\tau, \sigma, P)$. Пусть $\hat{\Lambda} = (\hat{\lambda}_i^j)$. Тогда имеем формулу, аналогичную (32), (33),

$$\Psi_i^j(\tau, \sigma, P) = g_i^j(\sigma, P) \exp \int_\sigma^\tau \zeta^j(\xi, P)\, d\xi, \tag{66}$$

где

$$\zeta^j(\xi, P) = -\sum_s \hat{\lambda}_s^j(\xi, E) \frac{g_i^s(\xi, P)}{g_i^j(\xi, P)}.$$

При $P \to \{k\}$ функция $\zeta^j(\tau, P)$ имеет асимптотику вида

$$\zeta^j(\tau, P) = -\hat{b}_k E^{\hat{N}} + O(1). \tag{67}$$

Функция $\hat{\Psi}^j(\tau, \sigma, P) = \dfrac{\Psi_i^j(\tau, \sigma, P)}{g_i^j(\sigma, P)}$ при $P \to \{j\}$ имеет асимптотику вида

$$\hat{\Psi}^j(\tau, \sigma, P) = \exp[\hat{b}_j E^{\hat{N}}(\sigma - \tau)]\left(1 + O\left(1/E\right)\right), \tag{68}$$

и при $P \to \{k\}$, $j \neq k$,

$$\hat{\Psi}^j(\tau, \sigma, P) = \frac{v_k^j(\tau)}{v_k^j(\sigma)} \exp[\hat{b}_k E^{\hat{N}}(\sigma - \tau)]\left(1 + O\left(1/E\right)\right). \tag{69}$$

Отсюда, как и в лемме 9, получаем формулу (62). Вектор **W** вычисляется так: пусть $\Omega_{k, \hat{N}}$ — абелев дифференциал (второго рода) с единственным полюсом порядка $\hat{N} + 1$ в точке $P = \{k\}$, причем в ее окрестности

$$\Omega_{k, \hat{N}} = -\hat{N} \frac{dz}{z^{\hat{N}+1}} + O(z) \tag{70}$$

(z — локальный параметр), нормированный условиями

$$\oint_{\alpha_j} \Omega_{k, \hat{N}} = 0, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{71}$$

Пусть вектор $\mathbf{W}_k$ имеет координаты W_k^l, где

$$W_k^l = \oint_{\beta_l} \Omega_{k, \hat{N}}, \quad l = 1, \ldots, p. \tag{72}$$

Тогда $\mathbf{W} = \sum_{k=1}^n \hat{b}_k \mathbf{W}_k$. Лемма 10 дает возможность построить удобные координаты на якобиевом многообразии J (Г).

Выведем формулы, дающие явное выражение потенциала V через θ-функции. Пусть η — заданная точка на J (Г). Введем обозначения:

$$\mathfrak{A}(D_w) = \hat{w}, \quad \mathfrak{A}\{j\} = [j], \quad \mathfrak{A}(\Sigma) = \sigma, \tag{73}$$

$$\eta_j = -\eta + \hat{w} - 2\sigma + [1] + [j], \quad \eta^i = \eta + [i] - [1], \tag{74}$$

$$\bar{\theta}(\eta) = \theta(\eta - \mathbf{K}), \quad \frac{\partial\bar{\theta}(\eta)}{\partial x_p} = \sum_l Z_p^l \bar{\theta}_{,l}(\eta), \tag{75}$$

$$\frac{\partial\bar{\theta}(\eta)}{\partial t_p} = \sum_l W_p^l \bar{\theta}_{,l}(\eta), \tag{76}$$

где вектор $\mathbf{W}_p$ определен формулой (72) при $\hat{N} = 2$; θ — функция

Римана (см. [13]), $\mathbf{K}$ — вектор римановых констант

$$K_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} B_{jj} + \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{p} \oint_{\alpha_k} \left(\int_{P_0}^{P} \omega_j \right) \omega_k(P). \tag{77}$$

Пусть

$$\xi_k^{(i)} = \begin{cases} \int_{P_0}^{\{i\}} \Omega_k, & k \neq i, \\ \lim\limits_{P \to \{i\}} \left(\int_{P_0}^{P} \Omega_k - E \right), & k = i, \end{cases} \tag{78}$$

где Ω_k определен условиями (57), (58), а $P_0 \in \Gamma$ — начало отсчета, входящее в определение отображения Абеля (48′). Пусть, далее,

$$\mu_k^{(i)} = \begin{cases} \int_{P_0}^{\{i\}} \Omega_{k,2}, & k \neq i, \\ \lim\limits_{P \to \{k\}} \left(\int_{P_0}^{P} \Omega_{k,2} - E^2 \right), & k = i. \end{cases} \tag{79}$$

Тогда для зависимости потенциала V от переменных $x_1, \ldots, x_n$ имеем следующее выражение (где $x_{1_0} = \ldots = x_{n_0} = 0$):

$$v_j^i(x_1, \ldots, x_n) = \omega_j^i \prod_k \exp\left[(\xi_k^{(j)} - \xi_k^{(i)}) x_k \right] \frac{\bar\theta(x_k \mathbf{Z}_k + \eta_j + [j])}{\bar\theta(x_k \mathbf{Z}_k + \eta^i + [i])}, \tag{80}$$

где ω_j^i — константы, не зависящие от x, связанные соотношениями

$$\frac{\omega_p^i \omega_j^p}{\omega_j^i} = \frac{\partial}{\partial x_p} \left\{ \ln \frac{\bar\theta(\eta_j + [j])}{\bar\theta(\eta^i + [i])} \right\} \cdot \left[\frac{\bar\theta(\eta^p + [p])}{\bar\theta(\eta_p + [p])} \right]^n, \quad p \neq i, j, \tag{81}$$

$$\omega_j^i \omega_i^j = \left[\frac{\bar\theta([i] + \eta^i)\, \bar\theta([j] + \eta^j)}{\bar\theta([i] + \eta_i)\, \bar\theta([j] + \eta_j)} \right]^n \times$$
$$\times \left\{ -\frac{\partial}{\partial t_p} \ln \frac{\bar\theta(\eta_j + [j])}{\bar\theta(\eta^i + [i])} + \mu_i^{(i)} - \mu_i^{(j)} + \left[2(\xi_i^{(j)} - \xi_i^{(i)}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \ln \frac{\bar\theta([j] + \eta_j)}{\bar\theta([i] + \eta^i)} \right]^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \ln \frac{\bar\theta([j] + \eta_j)}{\bar\theta([i] + \eta^i)} \right\}. \tag{82}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из тождества (39) и разложений (25) следует, что при $P \to \{i\}$

$$\chi_j(x, P) + \chi^i(x, P) = \left(\frac{v_i^{j\prime}}{v_i^j} \right) + O\left(\frac{1}{E} \right). \tag{83}$$

С другой стороны, из формулы (54) следует, что

$$\chi^i(x, P) = \frac{\partial}{\partial x} \ln \tilde\Psi^i(x, y, P). \tag{84}$$

Аналогично,

$$\chi_j(y, P) = \frac{\partial}{\partial y} \ln \underset{\sim}{\Psi}_j(x, y, P), \tag{84′}$$

где функция $\underset{\sim}{\Psi}_j(x, y, P) = \Psi_j^i(x, y, P)/g_j^i(x, P)$ имеет дивизор $d_j(y) - d_j(x)$ и экспоненциальную асимптотику в бесконечности. Функции $\widetilde{\Psi}^i$ и $\underset{\sim}{\Psi}_j$ определяются однозначно с учетом нормировки заданием точки η на $J(\Gamma)$ (см. доказательство теоремы). Их выражение через θ-функции таково:

$$\widetilde{\Psi}^i(x_k, 0, P) = \exp\left[x_k\left(\int_{P_0}^{P}\Omega_k - \xi_k^{(i)}\right)\right]\frac{\bar\theta(\mathfrak{A}(P) + x_k\mathbf{Z}_k + \eta^i)\,\bar\theta([i] + \eta^i)}{\bar\theta(\mathfrak{A}(p) + \eta^i)\,\bar\theta([i] + x_k\mathbf{Z}_k + \eta^i)}, \tag{85}$$

$$\underset{\sim}{\Psi}_j(0, x_k, P) = \exp\left[-x_k\left(\int_{P_0}^{P}\Omega_k - \xi_k^{(j)}\right)\right]\frac{\bar\theta(\mathfrak{A}(P) + \eta_j)\,\bar\theta([j] + \eta_j + x_k\mathbf{Z}_k)}{\bar\theta(\mathfrak{A}(P) + \eta_j + x_k\mathbf{Z}_k)\,\bar\theta([j] + \eta_j)}, \tag{85'}$$

где $k = 1, \ldots, n$. Из формул (85), (85′) и получаем, учитывая (83), (84), (84′), формулу (80). Формула (81) вытекает из уравнений (4′) и формулы (80). Формула (82) вытекает из уравнения (12′).

Включение временной динамики производится из леммы 10, при помощи замены $\eta \mapsto \eta + t\cdot\mathbf{W}$, где вектор $\mathbf{W}$ определяется равенством (72).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 7 декабря 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., Нелинейные уравнения типа Кортевега — де Фриза, УМН XXXI, вып. 1 (1976), 55—136.
2. Захаров В. Е., Шабат А. Б., Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, ЖЭТФ 61, вып. 1 (1971), 413—417.
3. Захаров В. Е., Манаков С. В., О резонансном взаимодействии волновых пакетов в нелинейных средах, Письма в ЖЭТФ 18, вып. 7 (1973), 413—417.
4. Манаков С. В., Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела, Функц. анализ 10, вып. 4 (1976), 93—94.
5. Мищенко А. С., Фоменко А. Т., Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли, ДАН СССР 231, № 3 (1976), 536—538.
6. Захаров В. Е., Шабат А. Б., Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I, Функц. анализ 8, вып. 3 (1974), 43—53.
7. Дубровин Б. А., Конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия, УМН XXXI, вып. 4 (1976), 259—260.
8. Итс А. Р., Канонические системы с конечнозонным спектром и периодические решения нелинейного уравнения Шрёдингера, Вестник ЛГУ 7, вып. 2 (1976), 39—46.
9. Кричевер И. М., Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии, Функц. анализ 11, вып. 1 (1977), 15—31.
10. Кричевер И. М., Алгебраические кривые и коммутирующие матричные дифференциальные операторы, Функц. анализ 10, вып. 2 (1976), 75—76.
11. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., Асимптотика резольвенты штурм—лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений КдФ, УМН XXX, вып. 5 (1975), 67—100.
12. Ахиезер Н. И., Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов, ДАН СССР 141, № 2 (1961), 263—266.
13. Зверович Э. И., Краевые задачи теории аналитических функций, УМН XXVI, вып. 1 (1971), 113—179.