МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 13, № 3 (1973), 419—426

УДК 519.4

ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ ВИТТА

Б. А. Дубровин

В настоящей работе построен функтор из категории одномерных коммутативных формальных групп в категорию топологических абелевых групп. Для мультипликативной формальной группы этот функтор является обычным функтором Витта. Изучаются некоторые свойства построенного функтора. Далее построенный функтор применяется для описания мультипликативных операций в теории унитарных кобордизмов. Библ. 7 назв.

§ 1. Основные определения

1. Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей, $R[[X, Y]]$ — кольцо формальных степенных рядов от двух переменных, $F(X, Y) \in R[[X, Y]]$ — одномерная коммутативная формальная группа над R, $I(X) \in R[[X]]$ — ее обратный элемент,

$$\omega(X) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} p_i X^i\right) dX \tag{1.1}$$

— ее канонический инвариантный дифференциал ($p_0 = 1$). Если R является Q-алгеброй, то существует ряд $l(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p_i}{i+1} X^{i+1}$ такой, что $\omega(X) = dl(X)$, и

$$F(X, Y) = l^{-1}(l(X) + l(Y)) \tag{1.2}$$

(см. [2]). Символом Λ будет обозначаться топологическое пространство формальных степенных рядов над R без свободного члена с обычной топологией формальных степенных рядов. Наделим Λ структурой абелевой топологической группы $\Lambda(R, F)$, полагая

$$(f +^F g)(X) = F(f(X), g(X)). \tag{1.3}$$

Проверка аксиом топологической группы тривиальна. Пусть R не имеет элементов конечного порядка.

ЛЕММА 1.4. *Пусть* $f(X)=\sum_{i=1}^{\infty} a_i X^i$. *Тогда ряд* $f(X)$ *единственным образом представляется в виде*

$$f(X)=\sum_{i=1}^{\infty} {}^F\alpha_i X^i. \tag{1.5}$$

Более того, если a_m *— первый отличный от нуля коэффициент* $f(X)$, *то* $\alpha_i=a_i$ *при* $i\leqslant m$.

Доказательство. Выражение (1.5) имеет смысл, так как его правая часть сходится в группе $\Lambda(R, F)$. Имеем уравнение над

$$R\otimes Q\colon\ l\left(\sum_{i=m}^{\infty} a_i X^i\right)=\sum_{i=m}^{\infty} l(\alpha_i X^i).$$

Отсюда

$$a_m X^m+o(X^m)=\alpha_m X^m+o(X^m),$$

т. е. $a_m=\alpha_m$, значит,

$$l\left(\sum_{i=m}^{\infty} a_i X^i\right)-l(a_m X^m)=\sum_{i=m+1}^{\infty} l(\alpha_i X^i) \tag{1.6}$$

Применяя теперь к обеим частям (1.6) ряд l, получаем:

$$F(f(X), I(a_m X^m))=\sum_{i=m+1}^{\infty} {}^F\alpha_i X^i. \tag{1.7}$$

Но левая часть (1.7) есть ряд над R, начинающийся со степени, большей m. Дальше — очевидная индукция.

Следствие. 1.8. $\Lambda(R, F)\subset\Lambda(R\otimes Q, F)$ — *подгруппа.*

Пример 1.9. Пусть $F_m(X, Y)=X+Y-XY$ — мультипликативная формальная группа. Рассмотрим отображение $\lambda:\Lambda\to R[[X]]$, полагая $f\xrightarrow{\lambda} 1-f(X)$. Тогда $(f+{}^F g)(X)=f(X)+g(X)-f(X)g(X)\xrightarrow{\lambda}$ $\xrightarrow{\lambda}[1-f(X)][1-g(X)]$, т. е. λ — непрерывный мономорфизм группы $\Lambda(R, F_m)$ в мультипликативную группу обратимых элементов кольца $R[[X]]$.

2. Определение 2.1. Обобщенной группой Витта $W(R, F)$ называется множество бесконечных векторов $x=(x_1, x_2, \ldots)$, где $x_i\in R\,\forall i$, причем отображения

$$w_n(x)=\sum_{d\mid n} d p_{\frac{n}{d}-1} x_d^{n/d}, \qquad n=1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

определяют набор гомоморфизмов в аддитивную группу кольца R.

Будем называть $x_1, x_2, \ldots$ истинными координатами вектора x, а $w_1(x), w_2(x), \ldots$ призрачными координатами. Из (2.2) следует, что переход от истинных координат к призрачным обратим над кольцом $R \otimes \boldsymbol{Q}$, т. е. сложение в группе $W(R \otimes \boldsymbol{Q}, F)$ определено однозначно из (2.1). Покажем, что $W(R, F)$ — подгруппа в $W(R \otimes \otimes \boldsymbol{Q}, F)$.

Определение 2.3. Отображение $E: W(R, F) \to \to R[[X]] \otimes \boldsymbol{Q}$, определяемое формулой

$$E(X) = l^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} w_n(x) X^n\right), \tag{2.4}$$

называется экспонентой Артина — Хассе.

ТЕОРЕМА 2.5. *Экспонента Артина — Хассе определяет изоморфизм групп* $E: W(R, F) \to \Lambda(R, F)$.

Доказательство. Из (2.4) имеем:

$$E(x+y) = l^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} w_n(x) X^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} w_n(y) X^n\right) = \\ = l^{-1}[l(E(x)) + l(E(y))] = E(x) +^F E(y). \tag{2.6}$$

Далее:

$$E(x) = l^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{d|n} d p_{\frac{n}{d}-1} x_d^{n/d}\right) X^n\right) = \\ = l^{-1}\left(\sum_{d,k} \frac{1}{k} p_{k-1} (x_d X^d)\right)^k = \\ = l^{-1}\left(\sum_{d=1}^{\infty} l(x_d X^d)\right) = \sum_{d=1}^{\infty}{}^F x_d X^d. \tag{2.7}$$

Теорема следует теперь из (2.6), (2.7) и леммы 1.4.

Следствие 2.8. *Структура группы на* $W(R, F)$ *определяется однозначно из* (2.1).

Доказательство немедленно следует из (1.8) и (2.5).

Пример 2.9. Для группы F_m примера (1.9) имеем: $p_i = 1$ для $i = 1, 2, \ldots$, т. е. формулы (2.2) принимают вид $w_n(x) = \Sigma_{d/n} d x_d^{n/d}$. Следовательно, группа $W(R, F_m)$ есть аддитивная группа кольца Витта (см. [1]). Этим мотивируется выбор названия для групп $W(R, F)$.

Введем в $W(R, F)$ топологию, индуцированную естественным нормированием: $v(x) = n$, если x_n — первая отличная от нуля истинная координата. Тогда E становится изоморфизмом топологических групп.

Пусть F — категория, объектами которой являются пары (R, F), F — формальная группа над кольцом R. Морфизм f категории $\boldsymbol{F}$ — это гомоморфизм колец $f: R_1 \to R_2$, причем $F_2 = F_1^f$, т. е. F_2 получается применением f к коэффициентам F_1. Заметим, что тогда $p_i^{F_2} = f(p_i^{F_1})$, где p_i определяется из (1.1). Определим $W(f): W(R_1, F_1) \to W(R_2, F_2)$, полагая $W(f)(x_1, x_2, \ldots) = (f(x_1), f(x_2) \ldots \ldots)$. Это, очевидно, непрерывный гомоморфизм групп.

В категории $\boldsymbol{F}$ имеется универсальный объект (см. [3]). Обозначим его символом (L, U). Так как L — кольцо без кручения, то определена группа $W(L, U)$. Если теперь (R, F) — объект из $\boldsymbol{F}$ и $f:(L, U) \to (R, F)$ — канонический гомоморфизм, то $W(R, F)$ определяется как образ группы $W(L, U)$ при гомоморфизме $W(f)$ в множестве всех векторов с координатами из R. Итак, W становится функтором из категории $\boldsymbol{F}$ в категорию топологических абелевых групп и их непрерывных гомоморфизмов.

§ 2. Эндоморфизмы функтора $\boldsymbol{W}$.

1. Определение 1.1. Определим семейство отображений сдвига $V_n: W \to W$, полагая

$$(V_n(x))_m = \begin{cases} x_{\frac{m}{n}}, & \text{если } n \mid m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.2}$$

ЛЕММА 1.3. *V_n — мономорфизм при $n = 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Вычислим действие V_n на призрачные координаты. Имеем:

$$w_m(V_n(x)) = \sum\nolimits_{n|d|m} d p_{\frac{m}{d}-1} x_{d/n}^{m/d},$$

т. е.

$$w_m(V_n(x)) = \begin{cases} \sum\nolimits_{kl=m/n} nkp_{l-1}x_k^l = nw_{m/n}(x), & \text{если } n \mid m, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1.4}$$

Утверждение леммы следует далее из очевидной инъективности отображения (1.2) и аддитивности выражения (1.4).

Определение 1.5. Определим семейство отображений Фробениуса $F_n : W \to W$ их действием на изоморфной группе Λ. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — формальные корни n-й степени из X. Положим

$$F_n(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} {}^F f(\xi_i). \qquad (1.6)$$

Правая часть (1.6), будучи симметричной по ξ_i в силу коммутативности группы F, является рядом из $R[[X]]$. Аддитивность отображений F_n очевидна.

ЛЕММА 1.7.

$$w_m(F_n(x)) = w_{mn}(x). \qquad (1.8)$$

Доказательство. Для простоты выкладок проверим наше утверждение на элементе $E((1, 0, \ldots)) = X$. Имеем:

$$F_n(X) = l^{-1}(l(\xi_1) + \ldots + l(\xi_n)) = l^{-1}((\xi_1 + \ldots + \xi_n) + \\ + \frac{p_1}{2}(\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2) + \ldots\Big) = l^{-1}(p_{n-1}X + p_{\frac{2n-1}{2}}X^2 + \ldots).$$

Но $w_m(1, 0, 0, \ldots) = p_{m-1}$. (1.8) теперь следует из предыдущих выкладок и из (1.2.4).

ТЕОРЕМА 1.9. V_n и F_n *обладают следующими свойствами*:

(1) $V_m \circ V_n = V_{mn}$,

(2) $F_m \circ F_n = F_{mn}$,

(3) $F_n \circ V_m = V_m \circ F_n$ *при* $(m, n) = 1$,

(4) $F_n \circ V_n$ *есть умножение на* n *в* $\mathbf{Z}$-*модуле* W,

(5) $\frac{1}{n} V_n \circ F_n$ *есть проектор* $W(R \otimes \mathbf{Q}, F)$ *на такие вектора* x, *что* $w_m(x) = 0$ *при* $n \nmid m$,

6) $\pi_p = \sum_{(n, p)=1} \frac{\mu(n)}{n} V_n \circ F_n$ *есть проектор* $W(R \otimes Z_p, F)$ *на такие вектора* x, *что* $w_m(x) = 0$ *при* $m \neq p^h$ (μ — *функция Мёбиуса*).

Доказательство. В силу (1.4) и (1.8) действие F_n и V_n на призрачные компоненты в обобщенных группах Витта идентично действию гомоморфизмов сдвига и Фробениуса в обычных группах Витта. Тем самым утверждения (1) — (6) теоремы сводятся к соответствующим утверждениям об обычных группах Витта, доказываемым подсчетом на призрачных компонентах (см., например, [1]).

Пусть теперь кольцо R является алгеброй над кольцом целых p-адических чисел Z_p.

Определение 1.10. Формальная группа F p-типична, если в группе $W(R, F)\, w_m(x) = 0$ при $m \neq p^h$.

Эквивалентность данного определения определению Картье (см. [4]) немедленно следует из (1.8).

ТЕОРЕМА 1.11. *Пусть* $f_p(X) = E(\pi_p(1))$. *Тогда формальная группа* $G_p(X, Y) = f_p^{-1}\, F(f_p(X), f_p(Y))$ *p-типична.*

Доказательство. Это немедленно следует из утверждения (6) теоремы (1.9).

§ 3. Связь с топологией.

1. Пусть $F(u, v)$ — формальная группа геометрических кобордизмов,

$$g(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[CP^i]}{i+1} u^{i+1} \in U^*(CP^\infty) \otimes Q \tag{1.1}$$

— ее логарифм (ряд Мищенко) (см. [6]). Здесь $u \in U^*(CP^\infty) = \Omega_U[[u]]$ — универсальный элемент, т. е. в этом случае коэффициенты инвариантного дифференциала (1.1.1) имеют вид $p_i = [CP^i]$, и формулы (1.2.2) принимают вид

$$w_n(x) = \sum_{d|n} d\, [CP^{n/d-1}]\, x_d^{n/d}. \tag{1.2}$$

ЛЕММА 1.3. *Пусть* $\varphi \in A^U \otimes Q$ — *мультипликативная операция в теории унитарных кобордизмов; тогда* $\varphi(g(u)) = g(u)$.

Доказательство. По определению, $g(u)$ является примитивным элементом при отображении $U^*(CP^\infty) \otimes Q \to U^*(CP^\infty) \hat{\otimes} U^*(CP^\infty) \otimes Q$, индуцированном H-структурой на CP^∞. Любая операция из A^U коммутирует с диагональю, т. е. мультипликативная операция переводит примитивные элементы в примитивные. Но Ω_U-модуль примитивных элементов одномерен, и так как $\varphi(g(u)) = u + o(u)$, то $\varphi(g(u)) = g(u)$.

Пусть $\varphi(u)$ есть формальный степенной ряд $f(u)$. Как известно (см. [6]), по ряду $f(u) \in \Omega_U[[u]] \otimes Q$ однозначно восстанавливается мультипликативная операция $\varphi \in A^U \otimes Q$. Обозначим $g^\varphi(u)$ ряд, получающийся из $g(u)$ действием φ на его коэффициенты. Имеем:

$$g(u) = \varphi(g(u)) = g^\varphi(f(u)),$$

следовательно,

$$g(f^{-1}(u)) = g^{\varphi}(u),$$

т. е.

$$f^{-1}(u) = g^{-1}(g^{\varphi}(u)). \qquad (1.4)$$

Пусть $x \in W(\Omega_U \otimes \mathbf{Q}, F)$ — такой вектор, что $w_n(x) = \varphi[CP^{n-1}]$. Тогда из (1.1), (1.4) и (1.2.3) получаем, что $f^{-1}(u) = E(x)$, т. е. экспонента Артина — Хассе устанавливает связь между действием мультипликативной операции на кольце коэффициентов и действием ее же на кобордизмах бесконечномерного проективного пространства.

Следствие 1.5. *Пусть $w_1, w_2, \ldots \in \Omega_U$. Тогда и только тогда существует мультипликативная операция $\varphi \in A^U$, при $\varphi[CP^{n-1}] = w_n$, когда существует набор $x_1, x_2, \ldots \in \Omega_U$, такой, что*

$$w_n = \sum\nolimits_{d|n} d\,[CP^{\frac{n}{d}-1}]\,x_d^{n/d}, \qquad x_1 = 1.$$

Доказательство. Это немедленно следует из предыдущих рассуждений и из (1.2).

Полученное следствие дает возможность получать разнообразную информацию о мультипликативных операциях из A^U. Например:

Следствие 1.6. *Для любой мультипликативной операции $\varphi \in A^U$ имеем:*

(1) $Td(\varphi[CP^{p^h-1}]) \equiv 1 \pmod p$,

(2) $L(\varphi[CP^{p^h-1}]) \equiv 1 \pmod p$ *при p нечетном,*

(3) $L(\varphi[CP^{2k-1}]) \equiv 0 \pmod 2$,

(4) $\chi(\varphi[CP^{n-1}]) \equiv 0 \pmod n$.

Здесь Td — род Тодда, L — L-род Хирцебруха, χ — эйлерова характеристика.

Доказательство. Все эти утверждения однотипны, поэтому докажем первое. Пусть $x \in W(\Omega_U, F)$ — такой вектор, что $w_n(x) = \varphi[CP^{n-1}]$. Он существует в силу (1.5). Пусть $y_i = Tdx_i$. Тогда в силу (1.2) имеем: $Tdw_n(x) = \Sigma_{d/n} d y_d^{n/d}$. В частности, $Tdw_{p^h}(x) = \sum_{i=0}^{n} p^i y_{p^i}^{p^{n-i}}$. Но $y_1 = w_1(x) = \varphi(1) = 1$, откуда и следует требуемое утверждение.

С л е д с т в и е 1.7. *Операция* $\varphi_p \in A^U \otimes Z_p$, *соответствующая вектору* $\pi_p(1)$, *действует следующим образом*:

$$\varphi_p\,[CP^{p^h-1}] = [CP^{p^h-1}],$$

$$\varphi_p\,[CP^n] = 0 \text{ при } n \neq p^h - 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это немедленно следует из утверждения (6) теоремы (2.1.9) и из (1.1) (ср. [6]).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 22.X.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W i t t E., Zyklische Körper und Algebren der Charakteristik ***p*** von Grad p^n, J. Reine und Angew., Math., Bd., **176**, № 3 (1936), 126—140.

[2] Х о н д а, Формальные группы и дзета-функции., Сб. переводов, Математика, **13**, № 6 (1969), 3—21.

[3] L a z a r d M., Sur les groups de Lie formels a un parametre, Bull. Soc. Math. France, **83** (1955), 251—274.

[4] М а м ф о р д Д., Лекции о кривых на алгебраической поверхности, М., 1968.

[5] C a r t i e r P., Sur les groupes formels abelienne, Comptes rendus, **265**, № 1 (1967), 49—129.

[6] Н о в и к о в С. П., Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов, Изв. АН СССР, Сер. матем., **31**, № 4 (1967), 855—951.

[7] Q u i l l e n D., On the formal group laws, Bull. Amer. Math, Soc., **75**, № 6 (1969), 1293—1298.